Bernd Döring

Behandlung eines graphentheoretischen Problems mit Hilfsmitteln aus der linearen Algebra

Unterrichtsreihe in einem Leistungskurs 13.Jahrgang

Pädagogische Prüfungsarbeit
Bezirksseminar für das Lehramt am Gymnasium
Bielefeld
1977

Some citizens of Königsberg
Were walking on the strand
Beside the river Pregel
With its seven bridges spanned.

"O Euler, come and walk with us,"
Those burghers did beseech.
"We'll roam the seven bridges o'er,
And pass but once by each."

"It can't be done," thus Euler cried.
"Here comes the Q.E.D.
Your islands are but vertices
And four have odd degree."

(Proof techniques in graph theory,[12],S.25)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Arbeit beschreibt die Planung und Durchführung einer Unterrichtsreihe über ein graphentheoretisches Problem, die im Dezember 1976 in einem Leistungskurs des 13.Jahrgangs der Marienschule in Bielefeld durchgeführt wurde. Das behandelte Problem ist die, sich aus dem Königsberger Brückenproblem ergebende, Frage nach der Charakterisierung von Euler-Graphen. Zum Beweis wurden Hilfsmittel aus der linearen Algebra verwendet.

Im ersten Abschnitt werden einige Ergebnisse, die sich durch die Anwendung linearer Algebra in der Graphentheorie erzielen lassen, kurz beschrieben. Die Darstellung geht über die in der Unterrichtsreihe behandelten Gegenstände hinaus, um die mathematische Perspektive dieser Betrachtungsweise zu zeigen.

Im zweiten Abschnitt werden für die Unterrichtsreihe bedeutsame Voraussetzungen auf Seiten der Schüler aufgezeigt.

Der dritte Abschnitt enthält Überlegungen zu drei Aspekten der Bedeutung der Graphentheorie in der Schule (Anwendungsfreudigkeit, Anschaulichkeit, Problemfreudigkeit) und zur Anwendung linearer Algebra in der Graphentheorie. Es folgt die Festlegung der Gegenstände der Unterrichtsreihe und der Groblernziele.

Im vierten Abschnitt werden Überlegungen zur genetischen Darstellung der Unterrichtsgegenstände, die Feinlernziele und Entscheidungen über Unterrichtsverfahren und Unterrichtsmittel beschrieben.

Im fünften Abschnitt wird die Feinplanung und die Durchführung der Unterrichtsreihe dargestellt.

Der sechste Abschnitt enthält eine Auswertung der Unterrichtsreihe, bezogen auf einige spezielle Fragen.

Im Anhang sind das Textbuch, die Arbeitsbögen und die Folien zu finden. Indizierte Definitionen, Beispiele und Sätze beziehen sich auf das Textbuch.

1. Darstellung möglicher Unterrichtsgegenstände

Da die Graphentheorie und das hier behandelte Teilgebiet nicht allgemein bekannt sind, soll im folgenden kurz der mathematische Stoff beschrieben werden. Dabei wird die Terminologie verwendet, die auch in der Unterrichtsreihe benutzt wurde. Es wurde eine mit wenigen Begriffen auskommende Terminologie gewählt, die speziell auf die behandelten Inhalte zugeschnitten ist. Daher (und wegen des uneinheitlichen Gebrauchs graphentheoretischer Begriffe) findet sich in der Literatur ein anderer Gebrauch einiger hier benutzter Begriffe.

Eine Darstellung von Teilen des hier beschriebenen Gebiets findet sich in Harary,[11],S.37-40 und S.64-65. In Döring,[7] wird eine Darstellung unter anderen Gesichtspunkten gegeben.

In 1.1. werden Euler-Graphen charakterisiert; in 1.2. wird zum Vektorraum der Zyklen eine Basis konstruiert. Weitere Ergebnisse, die die Anwendung linearer Algebra bei der Beschreibung graphentheoretischer Sachverhalte liefert, werden in 1.3. überblickartig beschrieben.

1.1. Euler-Graphen

Sei M eine endliche Menge, $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Für $A,B \in \mathcal{P}(M)$ sei $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. $\triangle$ heißt <u>symmetrische Differenz</u>. $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ ist eine abelsche Gruppe, wobei $\emptyset$ das neutrale Element und jedes $A \in \mathcal{P}(M)$ zu sich selbst invers ist. Für $0,1 \in \mathbb{Z}_2$ und jedes $A \in \mathcal{P}(M)$ sei definiert: $0 \circ A = \emptyset$ und $1 \circ A = A$. Dann ist $(\mathcal{P}(M), \triangle, \mathbb{Z}_2, \circ)$ ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum[1].

Sei E eine endliche nichtleere Menge, K eine endliche Menge und $p : K \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ eine Abbildung, die jedem Element aus K eine zweielementige Teilmenge von E zuordnet. $G = (E,K,p)$ heißt <u>Graph</u>. Die Elemente aus E heißen <u>Ecken</u>; die Elemente aus K heißen <u>Kanten</u>. Für $k \in K$ heißen die Elemente aus $p(k)$,

---

[1] vgl. Döring,[7],S.49-50

Endpunkte von k. Jede Kante eines Graphen hat also genau zwei verschiedene Endpunkte. Die Mengen $\mathcal{P}(K)$ und $\mathcal{P}(E)$ können in der oben beschriebenen Weise als $\mathbb{Z}_2$-Vektorräume aufgefaßt werden.

Ein Graph heißt Euler-Graph, wenn es eine endliche Folge $(e_1,k_1,e_2,k_2,\ldots,e_n,k_n,e_{n+1})$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $K=\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ und jede Kante aus K tritt in der Folge genau einmal auf,

(ii) $e_1,e_2,\ldots,e_{n+1} \in E$, $e_1=e_{n+1}$ und jede Ecke aus E tritt in der Folge mindestens einmal auf,

(iii) e_i und e_{i+1} sind Endpunkte von k_i (für $i=1,2,\ldots,n$).

Satz In einem Euler-Graphen ist jede Ecke Endpunkt einer geraden Anzahl von Kanten.

Beweis: s. Textbuch, S.5, Satz 1

Eine Menge von Kanten $W\subset K$ heißt Weg, wenn es eine endliche Folge $(e_1,k_1,e_2,k_2,\ldots,e_n,k_n,e_{n+1})$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $W=\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ und jede Kante aus W tritt in der Folge genau einmal auf,

(ii) $e_1,e_2,\ldots,e_{n+1} \in E$ und die in der Folge auftretenden Ecken sind paarweise verschieden (mit der möglichen Ausnahme: $e_1=e_{n+1}$),

(iii) e_i und e_{i+1} sind Endpunkte von k_i (für $i=1,2,\ldots,n$).

e_1 und e_{n+1} heißen Endpunkte des Weges W. Eine Folge mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) heißt Wegfolge von W. Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn je zwei verschiedene Ecken Endpunkte eines Weges sind. Insbesondere ist jeder Euler-Graph zusammenhängend. Da man Betrachtungen über zusammenhängende Graphen auch für jeden zusammenhängenden Teil eines nicht zusammenhängenden Graphen (für seine Komponenten) durchführen kann, werden im folgenden nur zusammenhängende Graphen betrachtet, die vereinfachend als Graphen bezeichnet werden.

Es sei also $G=(E,K,p)$ ein zusammenhängender Graph.

Ein Weg $R\subset K$ heißt Kreis, wenn es eine Wegfolge von R $(e_1,k_1,e_2,k_2,\ldots,e_n,k_n,e_{n+1})$ mit $e_1=e_{n+1}$ gibt.

Eine Menge von Kanten $Z \subset K$ heißt <u>Zyklus</u>, wenn jedes $e \in E$ Endpunkt einer geraden Anzahl von Kanten aus Z ist. Insbesondere ist $\emptyset \subset K$ ein Zyklus. Ist G ein Euler-Graph, so ist K ein Zyklus.

<u>Satz</u> Jeder Kreis ist ein Zyklus.

Beweis: s. Textbuch, S.11, Satz 2

<u>Satz</u> Sind $Z, Z' \subset K$ Zyklen, so ist auch $Z \triangle Z'$ ein Zyklus.

Beweis: s. Textbuch, S.11, Satz 3

Es ergibt sich, daß die Menge aller Zyklen ein Unterraum von $\mathcal{P}(K)$ ist. Die Menge aller Zyklen wird mit $\mathcal{Z}$ bezeichnet.

<u>Satz</u> Ist $Z \subset K$ ein nichtleerer Zyklus, so gibt es einen Kreis $R \subset Z$.

Beweis: s. Textbuch, S.12, Satz 4

<u>Satz</u> Ist $Z \subset K$ ein nichtleerer Zyklus, so ist Z symmetrische Differenz von disjunkten Kreisen.

Beweis: s. Textbuch, S.12, Satz 5

Da die Menge der Kreise eine Teilmenge der Menge der Zyklen ist, ist für $\mathcal{Z} \neq \{\emptyset\}$ die Menge der Kreise ein Erzeugendensystem von $\mathcal{Z}$. Nach Definition der symmetrischen Differenz ist die Vereinigung disjunkter Mengen gleich der symmetrischen Differenz dieser Mengen.

<u>Satz</u> Äquivalent sind:

(i) G ist ein Euler-Graph.

(ii) K ist Vereinigung von disjunkten Kreisen.

(iii) $K \neq \emptyset$ und K ist ein Zyklus.

Beweis: s. Textbuch, S.13, Satz 6 und S.14, Satz 7

Interessant für Anwendungen ist folgende Begriffsbildung: Eine endliche Folge $(e_1, k_1, e_2, k_2, \ldots, e_n, k_n, e_{n+1})$ heißt <u>Eulersche Linie von G</u>, wenn gilt:

(i) $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ und jede Kante aus K tritt in der Folge genau einmal auf,

(ii) $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1} \in E$, $e_1 \neq e_{n+1}$ und jede Ecke aus E tritt in der Folge mindestens einmal auf,

(iii) e_i und e_{i+1} sind Endpunkte von k_i (für $i = 1, 2, \ldots, n$).

<u>Satz</u> Es gibt dann und nur dann eine Eulersche Linie von G, wenn genau zwei Ecken Endpunkte einer ungeraden Anzahl von Kanten sind.

Beweis: s. Textbuch, S.15, Satz 8

1.2. Erzeugung von Zyklen

Eine Menge von Kanten $B \subset K$ heißt <u>Baum</u>, wenn gilt:

(i) keine Teilmenge von B ist ein Kreis,

(ii) ist $k \in K \setminus B$, so enthält $B \cup \{k\}$ genau einen Kreis und k ist ein Element dieses Kreises.

<u>Algorithmus</u> zur Konstruktion eines Baums

(i) Eine beliebige Ecke $e_0 \in E$ werde markiert.

(ii) Es seien die Ecken $e_0, e_1, \ldots, e_n$ markiert. Sind nicht alle Ecken markiert, gibt es, da G zusammenhängend ist, eine noch nicht markierte Ecke $e_{n+1} \in E$ und eine Kante $k_{n+1} \in K$, so daß e_{n+1} ein Endpunkt und eine bereits markierte Ecke der zweite Endpunkt von k_{n+1} ist. e_{n+1} und k_{n+1} werden markiert.

(iii) Das Verfahren endet, wenn alle Ecken markiert sind.

Die Menge der markierten Kanten ist ein Baum.

Beweis: (i) Nach dem Konstruktionsverfahren kann die Menge der markierten Kanten keinen Kreis enthalten.

(ii) Für je zwei verschiedene Ecken $e, e' \in E$ gibt es genau einen Weg, der nur aus markierten Kanten besteht und die Ecken e und e' als Endpunkte hat. Fügt man den markierten Kanten eine weitere hinzu, so enthält die neue Menge genau einen Kreis und die hinzugefügte Kante ist ein Element des Kreises.

Der Algorithmus zeigt, daß es zu jedem Graphen einen Baum gibt. Es muß noch gezeigt werden, daß jeder Baum auf diese Weise konstruiert werden kann.

<u>Satz</u> Ist $B \subset K$ ein Baum, so ist $G' = (E, B, p|B)$ ein (zusammenhängender) Graph.

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß G' zusammenhängend ist. Wenn G' nicht zusammenhängend ist, gibt es zwei verschiedene Ecken $e, e' \in E$, die nicht die Endpunkte eines Weges $W \subset B$ sind. Es gibt aber einen Weg $W' \subset K$ mit den Endpunkten e und e'. Da $W' \not\subset B$ ist, gibt es ein $k \in W'$, so daß $k \notin B$ ist und die Endpunkte von k nicht Endpunkte eines Weges $W'' \subset B$ sind. (Andernfalls

wären e und e' die Endpunkte eines Weges $W \subset B$.) Dann enthält $B \cup \{k\}$ keinen Kreis und B ist kein Baum.
Also ist G' zusammenhängend.

Ist $B \subset K$ ein Baum, kann der Algorithmus auf $G' = (E,B,p|B)$ angewendet werden. Dabei werden alle Kanten von B markiert, da keine echte Teilmenge von B ein Baum ist.

<u>Satz</u> Ein Baum enthält genau $|E| - 1$ Kanten.

Beweis: Sei $B \subset K$ ein Baum. Wendet man den Algorithmus auf $G' = (E,B,p|B)$ an, wird bis auf den ersten Schritt (Markierung von e_0) mit jeder Ecke genau eine Kante markiert. Also werden $|E| - 1$ Kanten markiert.

Sei $B \subset K$, $B \neq K$, ein Baum, $K \setminus B = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ und für $i = 1,2,\ldots,n$ sei $R_i \subset B \cup \{k_i\}$ der Kreis, den $B \cup \{k_i\}$ enthält.
Die Menge $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ heißt <u>Fundamentalsystem von Kreisen zum Baum B</u>.

<u>Satz</u> Ist $B \subset K$, $B \neq K$, ein Baum, so ist das Fundamentalsystem von Kreisen zum Baum B eine Basis von $\mathcal{Z}$.

Beweis: (i) Lineare Unabhängigkeit

Sei $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ das Fundamentalsystem von Kreisen zum Baum B. Für $\alpha_i \in \mathbb{Z}_2$, $i = 1,2,\ldots,n$, sei $\alpha_1 \circ R_1 \triangle \alpha_2 \circ R_2 \triangle \ldots \triangle \alpha_n \circ R_n = \emptyset$. Da jedes R_i eine Kante enthält, die kein anderes R_j $(i,j \in \{1,2,\ldots,n\},\ i \neq j)$ enthält, ist $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1,2,\ldots,n$.

(ii) Erzeugendensystem

Es ist nur zu zeigen, daß jeder Kreis symmetrische Differenz von Kreisen aus dem Fundamentalsystem ist.

Sei $R \subset K$ ein Kreis, $R \cap (K \setminus B) = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$. $R_1, R_2, \ldots, R_m$ seien die Kreise des Fundamentalsystems, die durch $k_1, k_2, \ldots, k_m$ bestimmt werden. Da jedes k_i $(i = 1,2,\ldots,m)$ Element genau eines der Kreise $R_1, R_2, \ldots, R_m$ und Element aus R ist, ist $R \triangle R_1 \triangle R_2 \triangle \ldots \triangle R_m \subset B$. Da $R, R_1, R_2, \ldots, R_m$ Zyklen sind, ist auch $R \triangle R_1 \triangle R_2 \triangle \ldots \triangle R_m$ ein Zyklus. Ist $R \triangle R_1 \triangle R_2 \triangle \ldots \triangle R_m \neq \emptyset$, so gibt es einen Kreis $R' \subset R \triangle R_1 \triangle R_2 \triangle \ldots \triangle R_m \subset B$, was ein

Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also ist
$R \triangle R_1 \triangle R_2 \triangle \dots \triangle R_m = \emptyset$, woraus folgt
$R = R_1 \triangle R_2 \triangle \dots \triangle R_m$.
Daraus ergibt sich $\dim \mathcal{Z} = |K| - |B| = |K| - |E| + 1$. Dies gilt auch für den im Satz nicht behandelten Fall, daß K ein Baum ist. Es gibt in einem Graphen $2^{(|K|-|E|+1)}$ verschiedene Zyklen.

1.3. Weitere Entwicklung [1]

Die Abbildung $p: K \longrightarrow \mathcal{R}(E)$ kann auch als Abbildung von der Menge der einelementigen Teilmengen von K in $\mathcal{R}(E)$ aufgefaßt werden. Da die Menge der einelementigen Teilmengen von K eine Basis von $\mathcal{R}(K)$ ist, gibt es nach dem Fortsetzungssatz genau einen Homomorphismus $f: \mathcal{R}(K) \longrightarrow \mathcal{R}(E)$, der, vorbeschränkt auf die Menge der einelementigen Teilmengen von K, mit p übereinstimmt. Für alle $K' \in \mathcal{R}(K)$ ist
$f(K') = f(\underset{k \in K'}{\triangle} \{k\}) = \underset{k \in K'}{\triangle} f(\{k\}) = \underset{k \in K'}{\triangle} p(k)$ und es ist $e \in f(K')$ genau dann, wenn die Anzahl der Kanten aus K' mit Endpunkt e ungerade ist.
Es ist $\mathcal{Z} = \mathrm{Kern}\, f$.

Ordnet man E und K auf beliebige Art, also etwa $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ und $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, so entspricht die Inzidenzmatrix

$$I = \begin{pmatrix} d_{11} \dots d_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ d_{m1} \dots d_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } e_i \in p(k_j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ für } i = 1,2,\dots,m,$$

$j = 1,2,\dots,n$ dem Homomorphismus f. $Z \subset K$ ist ein Zyklus genau

dann, wenn $$\beta_Z = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ mit } \beta_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_j \in Z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ für } j = 1,2,\dots,n$$

eine Lösung des binären homogenen linearen Gleichungssystems
$I \cdot \beta = 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_2^{\,n}$, ist.

Zu Kreis und Zyklus duale Begriffsbildungen sind trennende Kantenmenge und Cozyklus. Eine Menge von Kanten $T \subset K$ heißt <u>trennende Kantenmenge</u>, wenn $G' = (E, K \setminus T, p|K \setminus T)$ kein zusammen-

---

[1] vgl. Döring, [7]

hängender Graph ist und keine echte Teilmenge von T diese Eigenschaft hat. Eine Menge von Kanten $C \subset K$ heißt Cozyklus, wenn es eine Menge von Ecken $E' \subset E$ gibt, so daß C die Menge aller Kanten mit genau einem Endpunkt aus E' ist. Die Menge der Cozyklen ist ein Unterraum $\mathcal{C}$ von $\mathcal{R}(K)$. Die Menge der trennenden Kantenmengen ist ein Erzeugendensystem von $\mathcal{C}$. Der analog zum Baum definierte Co-Baum liefert eine Basis von $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ ist Bild eines Homomorphismus $f': \mathcal{R}(E) \longrightarrow \mathcal{R}(K)$. Da f' zu f adjungiert ist (bzg. der Standard-Produkte auf $\mathcal{R}(K)$ und $\mathcal{R}(E)$ bezüglich der Basen der einelementigen Teilmengen von K bzw. E), sind $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{C}$ zueinander orthogonale Unterräume von $\mathcal{R}(K)$. Daraus ergibt sich, daß für alle Zyklen $Z \in \mathcal{Z}$ und alle Cozyklen $C \in \mathcal{C}$ gilt: $|Z \cap C| \equiv 0 \pmod{2}$. Weiter ist $C \subset K$ genau dann ein Cozyklus, wenn für

$$\beta_C = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \beta_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } k_j \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } j = 1,2,\ldots,n \quad \text{das}$$

binäre lineare Gleichungssystem $I' \cdot \alpha = \beta_C$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2^{\,m}$, lösbar ist, wobei I' die zur Inzidenzmatrix I transponierte Matrix ist. Ein Co-Baum ist genau das Komplement eines Baums. Es ergibt sich $\dim \mathcal{C} = \dim \mathcal{R}(K) - \dim \mathcal{Z} = |E| - 1$. Es gibt $2^{(|E|-1)}$ verschiedene Cozyklen.

2. Voraussetzungen auf Seiten der Schüler

2.1. Zusammensetzung des Kurses

Der Kurs ist mir durch eine Unterrichtsreihe vom 1.9. bis zum 7.10.1976 und durch Hospitationen in der Zeit vom 3.11. bis zum 29.11.1976 bekannt. Er setzt sich aus 20 Schülern (17 weiblich, 3 männlich: DK, DS, PS) zusammen und besteht in dieser Zusammensetzung seit Februar 1975 (2.Halbjahr der 11.Klasse). Die Verteilung der Schüler auf die beiden Mathematik-Leistungskurse erfolgte nach der Wahl des anderen Leistungskursfachs, wobei in diesem Kurs die Schüler mit den Fächern Deutsch (6 Schüler), Englisch (10 Schüler) und Gemeinschaftskunde (4 Schüler) sind. Die Schüler, die ein naturwissenschaftliches Fach als anderes Leistungskursfach gewählt haben, sind in dem zweiten Mathematik-Leistungskurs.

Eine Übersicht über das Alter der Schüler (Anfang Dezember 1976), die Mathematik-Noten des ersten und zweiten Halbjahrs der 12.Klasse sowie die Noten der Klausur und die Noten für sonstige Mitarbeit im ersten Kursabschnitt von 13.1 gibt Tabelle 1. Das Alter der Schüler liegt zwischen 18 Jahren, einem Monat und 20 Jahren, vier Monaten. Eine Übersicht über die Häufigkeit der Noten gibt Tabelle 2; zur besseren Übersichtlichkeit sind Notenstufen nicht berücksichtigt. Das arithmetische Mittel der in Punkte umgewandelten Noten ist: 8,45 (entspricht der Note 3) für 12.1, 8,95 (entspricht 3+) für 12.2, 9,35 (entspricht 3+) für die Klausur und 9,15 (entspricht 3+) für die sonstige Mitarbeit im ersten Kursabschnitt von 13.1 [1].

Als Studienwunsch wird von vier Schülern (BW, DS, RH und UP) Mathematik genannt. Bei den anderen Schülern lassen die Studienwünsche Wirtschaftswissenschaften (DK, PS und UB) und

---

1 Die Berechnung des arithmetischen Mittels ist streng genommen nicht zulässig (vgl. Clauß, Ebner,[6],S.23). Der Median weicht jedoch nur bei den Noten von 12.2 und den Noten für sonstige Mitarbeit im ersten Kursabschnitt von 13.1 um eine Notenstufe nach oben (2- statt 3+) von der Note ab, die dem arithmetischen Mittel der Punkte entspricht.

Name	Alter	12.1	12.2	13.1, 1.Kursabschnitt Klausur	sonstige Mitarbeit
AP	18. 6	4+	4+	3	3+
BO	18.10	3	2-	2-	2
BS	20. 4	4	4	4	5+
BW	18. 2	3	2-	2	2-
CS	19. 0	2+	1-	1	1-
DK	19. 0	2+	2-	2	2
DS	18. 9	1-	2+	2	1
GH	18. 2	3-	3-	4	3
GM	20. 2	2-	2-	3	2+
GT	18. 6	1-	2+	2	1-
HT	18. 4	2-	2-	3	2-
IH	19. 5	4+	3	3	3
MK	18. 2	4-	3	3	4+
PS	19. 7	4+	4+	3-	4
RH	18. 9	2+	2+	2	1-
SE	19. 6	4+	3-	2-	5+
SL	18. 7	3-	3	2	4+
SR	18. 8	4-	4	3	4-
UB	18. 1	2	2-	3	2-
UP	18. 9	3+	2-	1	1

Tabelle 1: Alter der Schüler, Mathematik-Noten

Note	12.1	12.2	13.1, 1.Kursabschnitt Klausur	sonstige Mitarbeit
1	2	1	2	5
2	6	10	8	6
3	5	5	8	3
4	7	4	2	4
5	-	-	-	2
6	-	-	-	-

Tabelle 2: Häufigkeit der Noten

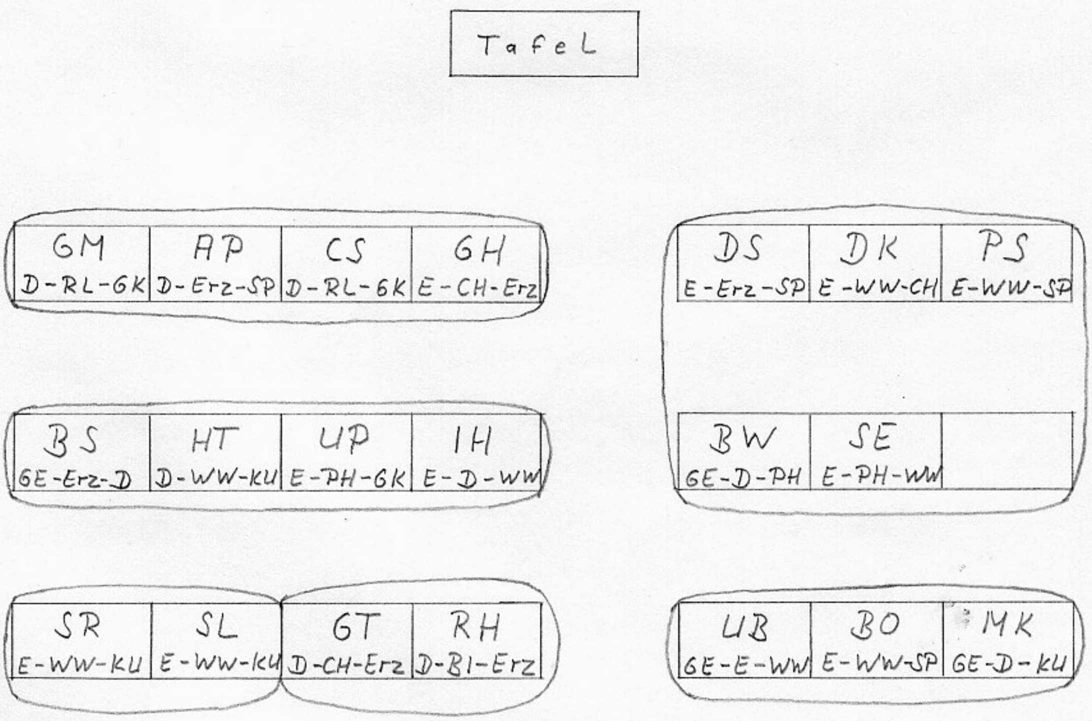
Pädagogik (BS) auf eine spätere Beschäftigung mit Mathematik (bzw. vor allem mit Statistik) schließen.

Die Schüler sind mit der Arbeitsform Gruppenarbeit vertraut. Auch wurden Schülerreferate gehalten. Jeder Schüler hat seit Februar 1975 mindestens ein Referat gehalten. In diesem Schuljahr hielten MK ein Referat über Normalenformen und DK und DS ein Referat über die Einführung eines inneren Produkts in $\mathbb{R}^3$.

Die Mitarbeit im Unterricht reicht von aktiver Beteiligung und dem Einbringen guter Ideen (CS, DS, GT, RH, UP und mit gewissen Einschränkungen DK, GM, UB) bis zu passiver Rezeption bei nur ausnahmsweisen Beiträgen (BS, SE, SL, SR und mit zeitweiser Aktivität MK, PS). Besonders auffällig ist der Unterschied zwischen schriftlicher und mündlicher Leistung bei SE (5+ und 2- für sonstige Mitarbeit bzw. Klausur im 1.Kursabschnitt von 13.1) und bei SL (4+ und 2).

2.2. Spezielle Beobachtungen

Zwei der drei wöchentlichen Doppelstunden finden im Physik-Übungsraum statt. Hier haben die Schüler eine feste Sitzordnung; in der dritten Doppelstunde - in einem anderen Raum - hat sich keine feste Sitzordnung herausgebildet. Da sich die während des Unterrichts gebildeten Gruppen stets entsprechend der Sitzordnung zusammensetzen (die Schüler regeln die Zusammensetzung der Gruppen selbst), kommt der festen Sitzordnung Bedeutung für die Durchführung von Gruppenarbeit zu. Diese Sitzordnung und die von den Schülern bevorzugte Gruppenzusammensetzung sieht folgendermaßen aus:



Unter den Namen der Schüler sind in Reihenfolge das andere Leistungskursfach, das dritte und das vierte Abiturfach angegeben [1]. Die Stellung der Tische kann nicht verändert werden. Die zusammensitzenden Schüler sind zum großen Teil gemeinsam in weiteren Kursen; besonders auffällig ist dies bei SL und SR: alle vier Abiturfächer stimmen überein (ebenso die von den beiden Schülerinnen genannten Berufswünsche).

Da nicht alle Schüler für den seit Beginn dieses Schuljahres behandelten Stoff ein Lehrbuch erhalten haben und der Unterricht sich häufig nicht am Buch orientiert, sind die Schüler auf ihre Notizen angewiesen. Dadurch wird die Möglichkeit der Teilnahme am Unterrichtsgeschehen (insbesondere am Unterrichtsgespräch) für die Schüler reduziert. Sie widmen sich mehr der Aufzeichnung von Unterrichtsergebnissen als deren Erarbeitung. Dies trifft in besonderem Maße auf die leistungsschwächeren Schüler zu.

2.3. Mathematische Vorkenntnisse der Schüler

Kursthemen waren von 11.2 bis 12.2 Informatik, Analysis und Wirtschaftsmathematik. Seit Beginn dieses Schuljahrs wird lineare Algebra und Analytische Geometrie behandelt. Aus dem Gebiet der linearen Algebra waren Gruppe, Körper, Vektorraum, lineares Gleichungssystem, Unterraum, Erzeugendensystem, Basis, Dimension und inneres Produkt Unterrichtsgegenstände.

Lineare Gleichungssysteme und innere Produkte sind jedoch nicht allgemein, sondern nur im $\mathbb{R}^3$ behandelt worden. Als Beispiele eines Vektorraums kennen die Schüler die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Als Beispiel einer Gruppe wurde u.a. die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer endlichen Menge M mit der symmetrischen Differenz als Verknüpfung behandelt. Die

---

[1]

BI	Biologie	GK	Gemeinschaftskunde
CH	Chemie	KU	Kunst
D	Deutsch	PH	Physik
E	Englisch	RL	Religionslehre
Erz	Erziehungswissenschaften	SP	Sport
GE	Geschichte	WW	Wirtschaftswissenschaften

Menge $\{0,1\}$ ist den Schülern als Körper bekannt (mit entsprechender Definition von Addition und Multiplikation). Der Körper $\mathbb{Z}_2$ wurde nicht im Unterricht behandelt; auch fehlen den Schülern Kenntnisse über Äquivalenzrelationen. Der Begriff Unterraum wurde als Teilmenge eines Vektorraums, die bzg. der Verknüpfungen selbst ein Vektorraum ist, eingeführt. Es wurde bewiesen, daß eine Teilmenge eines Vektorraums genau dann ein Unterraum ist, wenn sie abgeschlossen bzg. der beiden Verknüpfungen ist. Erzeugendensystem, Basis und Dimension wurden für Vektorräume definiert und in den Räumen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Im $\mathbb{R}^3$ ist den Schülern das Standard-Produkt bezüglich der Basis $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ bekannt.

Kenntnisse der Graphentheorie sind nicht vorhanden.

3. Didaktische Überlegungen [1]

3.1. Überlegungen zur Graphentheorie

Auf die Stellung der Graphentheorie in der Mathematik soll hier nur mit einem Zitat von Berge eingegangen werden.

"La Théorie des Graphes a eu un développement bien étrange; d'abord apparue dans le magasin des curiosités mathématiques («les ponts de Königsberg»), puis devenue un outil pour l'étude des circuits électriques (Kirchhof), elle a été utilisée par la chimie, la psychosociologie et l'économie avant même d'avoir été constituée. Elle est devenue aujourd'hui une des branches les plus florissantes de l'algèbre moderne, celle à laquelle on fait appel dans la plupart des problèmes mathématiques de nature combinatoire, ou même dans les problèmes d'Algèbre les plus classiques ..." [2]

Für die Bedeutung der Graphentheorie in der Schule werden von Bigalke drei Aspekte angeführt:

" - die immense Anwendungsfreudigkeit,
- die große Anschaulichkeit und
- die weitgestreute Problemfreudigkeit auf jedem beliebigen Niveau." [3]

Sachs nennt Anwendungsmöglichkeiten der Graphentheorie in Geometrie, Biologie, Chemie, Physik, Spieltheorie, Operationsforschung, Systemtheorie und Kybernetik, Soziologie, Regelungstechnik, Nachrichtenwesen, Verkehrswesen und Versorgungswesen [4].

Harary schreibt zur Anwendbarkeit der Graphentheorie:

"It has become fashionable to mention that there are applications of graph theory to some areas of physics, chemistry, communication science, computer technology, electrical and civil engineering, architecture, operational research, genetics, psychology, sociology, economics, anthropology, and linguistics. The theory is also intimately related to many branches of mathematics, including group theory, matrix theory, numerical analysis, probability, topology, and combinatorics." [5]

Die Anschaulichkeit ergibt sich aus der Tatsache, daß ein Graph leicht als Figur dargestellt werden kann.

---

1 Die Ausführungen können als Antworten auf die fünf didaktischen Grundfragen Klafkis (Klafki,[14],S.15-22) verstanden werden.

2 Berge,[2], Avant-Propos

3 Bigalke,[3],S.191

4 Sachs,[21],S.187-188

5 Harary,[11], Preface

Dazu schreibt Berge :

"En fait, les concepts fondamentaux ... s'ils sont définis d'une façon abstraite, restent en rapports constants avec des réalités graphiques, faciles à reconnaître lorsque le schéma est tracé." [1]

Auch Sachs hebt die Anschaulichkeit der Graphentheorie hervor [2]. Die Problematisierung der Veranschaulichung eines Graphen durch eine Figur über die Einführung der Isomorphie von Graphen [3] bringt jedoch keine zusätzlichen Einsichten, da Veranschaulichungen von Begriffen keine eigenständige mathematische Bedeutung haben. Auch sollten in die Anschaulichkeit der Graphentheorie keine zu großen Erwartungen gesetzt werden : sobald nicht nur einzelne Graphen untersucht werden, sondern man sich für Aussagen über alle Graphen interessiert, tritt die Anschauung in den Hintergrund.

Die Problemfreudigkeit der Graphentheorie beruht auf ihrer geschichtlichen Entwicklung und auf der großen Breite ihrer Anwendungen. Die Entwicklung der Graphentheorie war zum größten Teil durch die Suche nach Lösungen für konkrete Probleme bestimmt [4], obwohl es auch axiomatische Ansätze gibt [5].

Sachs sieht durch die Graphentheorie "logisch einwandfreies Schließen, Phantasie, Vorstellungsvermögen und Modelldenken ... gleichermaßen gefördert" [6] und Jeger "eine hübsche Möglichkeit ..., im Schulunterricht kombinatorisches und heuristisches Denken zu pflegen" [7].

In den Mathematik-Unterrichtsempfehlungen wird für einen Aufbaukurs im Differenzierungsbereich "Graphentheorie" als Thema zur Erprobung vorgeschlagen [8]. In den Empfehlungen für den Kursunterricht im Fach Mathematik wird u.a. ein Leistungs-

---

1 Berge,[1], Introduction
2 s. Sachs,[21],S.197
3 s. Bigalke,[3],S.190-191
4 vgl. Sachs,[21],S.190-195, einen guten Überblick über die anfängliche Entwicklung der Graphentheorie gibt - anhand von 37 Originalarbeiten - Biggs, Lloyd, Wilson,[4]
5 s. Whitney,[22], Minty,[18]
6 Sachs,[21],S.197
7 Jeger,[13],S.12
8 Mathematik-Unterrichtsempfehlungen,[16],S.74

kurs "Ausgewählte Probleme (aus verschiedenen Teilgebieten) der Mathematik" vorgeschlagen. Als Beispiele werden aus der Graphentheorie das Königsberger Brückenproblem und das Vierfarbenproblem genannt. Zur Durchführung des Kurses wird empfohlen, die einzelnen Probleme in Minitheorien einzubetten [1].

3.2. Überlegungen zu den möglichen Unterrichtsgegenständen

Die für die Schule bedeutsamen Aspekte der Graphentheorie (Problemfreudigkeit, Anschaulichkeit, Anwendungsfreudigkeit) treffen mit gewissen Einschränkungen auch auf die im ersten Abschnitt dargestellten möglichen Unterrichtsgegenstände zu. Als Problemstellung eignet sich z.B. das Königsberger Brückenproblem, aus dem sich die Frage nach einer Charakterisierung der Euler-Graphen ergibt. Die Konstruktion einer Basis zum Vektorraum der Zyklen und die Beschreibung dieses Raums als Kern eines Homomorphismus und als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sind allerdings systematische Entwicklungen, die über die Suche nach der Lösung des Problems hinausgehen. Dies gilt auch für die Dualität von Zyklen und Cozyklen. Die Anschaulichkeit kann gut zur Klärung von Begriffen und bei der Durchführung der Beweise genutzt werden; für Beispiele ist sie von vornherein gegeben. Jedoch tritt die Anschaulichkeit bei den in 1.3. beschriebenen Resultaten sehr stark in den Hintergrund. Als Anwendungen bieten sich vor allem Probleme aus der Unterhaltungsmathematik an. Praktische Anwendungen können wegen der Größe der den Problemen entsprechenden Graphen nicht herangezogen werden. Auch läßt der hier behandelte Teil der Graphentheorie nur eng begrenzte Fragestellungen zu.

Daneben enthalten die möglichen Unterrichtsgegenstände einen weiteren wesentlichen Aspekt: die Anwendung linearer Algebra. Die in 1.1. dargestellte Charakterisierung der Euler-Graphen

---

1 Empfehlungen für den Kursunterricht im Fach Mathematik, [8],S.118

läßt sich auch ohne Benutzung algebraischer Hilfsmittel beweisen, ebenso einige Resultate in 1.2., doch liefert erst die Anwendung linearer Algebra einen tieferen Einblick in die bestehenden Zusammenhänge. Am interessantesten ist die, durch die Übertragung des Begriffs Orthogonalität klar hervortretende, Dualität der Zyklen und Cozyklen eines Graphen. Das Gewinnen graphentheoretischer Resultate mit Hilfe von - den Schülern bekannten - Begriffen und Sätzen der linearen Algebra bietet ein Beispiel für die Anwendung von Mathematik zur Lösung von Problemen und zur Beschreibung von Zusammenhängen in einem anderen mathematischen Gebiet. Die Schüler lernen - neben dem Modell der Analytischen Geometrie - ein weiteres Vektorraummodell kennen. Dabei wird nicht nur die Vektorraumeigenschaft einer strukturierten Menge nachgewiesen, sondern es wird mit diesem Vektorraum gearbeitet. Hier zeigt sich ein wesentlicher Vorteil axiomatischer Theorien: durch die Formulierung der Resultate in großer Allgemeinheit wird eine breite Anwendbarkeit erzielt. Die im ersten Abschnitt dargestellten graphentheoretischen Ergebnisse bieten also eine Möglichkeit lineare Algebra auf ein anderes - ihr zunächst fernliegendes - mathematisches Gebiet anzuwenden. Mit zunehmender Anwendung linearer Algebra wird jedoch die Anschaulichkeit der Resultate und Methoden geringer.

Für die in 1.1. dargestellten Unterrichtsgegenstände ist an Vorwissen aus der linearen Algebra die Kenntnis des Körpers $\mathbb{Z}_2$ und der Begriffe Vektorraum über einem Körper, Unterraum und Erzeugendensystem erforderlich. Für 1.2. wird die Kenntnis der Begriffe lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension und die Kenntnis der Anzahl der Elemente der Potenzmenge einer endlichen Menge benötigt. 1.3. erfordert - je nachdem wieviel Stoff behandelt werden soll - die Kenntnis des Begriffs Vektorraumhomomorphismus und des Fortsetzungssatzes sowie der Tatsache, daß der Kern eines Homomorphismus ein Vektorraum ist, die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Matritzen mit Elementen aus dem Körper und Homomorphismen, Kenntnisse über die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sowie Kenntnisse über innere Produkte und adjungierte Homomorphismen.

Die für 1.1. und 1.2. erforderlichen Vorkenntnisse werden zum größten Teil im Leistungskurs "Lineare Algebra und Analytische Geometrie" bereitgestellt [1]; von den für 1.3. nötigen Vorkenntnissen können nicht alle in der Schule bereitgestellt werden. Daraus ergibt sich, daß die Behandlung der in 1.1. und 1.2. beschriebenen Unterrichtsgegenstände in oder nach einem Leistungskurs "Lineare Algebra und Analytische Geometrie" möglich ist. Einige der Unterrichtsgegenstände aus 1.3. könnten bei entsprechenden Vorkenntnissen der Schüler behandelt werden.

3.3. Festlegung der Unterrichtsgegenstände

Für die Durchführung der Unterrichtsreihe stehen im Zeitraum vom 1.12. bis zum 22.12.1976 sieben Doppelstunden zu Verfügung und zwar am 1.12., 2.12., 13.12., 15.12., 16.12., 20.12. und 22.12. Die Pause zwischen dem 2.12. und dem 13.12. ist bedingt durch Kursarbeiten in beiden Leistungskursfächern und eine Übungsdoppelstunde zur Vorbereitung auf die Mathematik-Arbeit. Von den sieben Doppelstunden sollen zwei als Übungsstunden durchgeführt werden.

Aufgrund der Vorkenntnisse der Schüler kommen die in 1.1. und 1.2. beschriebenen Unterrichtsgegenstände in Frage. Da nur fünf Doppelstunden zur Stofferarbeitung verfügbar sind, wird als Unterrichtsgegenstand die Charakterisierung von Euler-Graphen gewählt. Um weitere Anwendungsmöglichkeiten zu erhalten, sollen auch Eulersche Linien behandelt werden, so daß die in 1.1. dargestellten Unterrichtsgegenstände für die Durchführung ausgewählt werden.

Obwohl die Charakterisierung der Euler-Graphen durch rein graphentheoretische Überlegungen möglich ist, sollen Hilfsmittel aus der linearen Algebra aus den in 3.2. genannten Gründen benutzt werden. Dadurch fügt sich die Unterrichtsreihe sinnvoll in die behandelten und noch zu behandelnden

---

[1] s. Empfehlungen für den Kursunterricht im Fach Mathematik, [8],S.78-85

Kursthemen ein. Um die graphentheoretischen Überlegungen zu vereinfachen, werden Schlingen (Kanten mit genau einem Endpunkt) nicht betrachtet. Da den Schülern der Körper $\mathbb{Z}_2$ und auch Äquivalenzrelationen nicht bekannt sind und in der zur Verfügung stehenden Zeit auch nicht eingeführt werden können, soll der den Schülern bekannte Körper $\{0,1\}$ in der Unterrichtsreihe an die Stelle von $\mathbb{Z}_2$ treten. Dies kann eine Verminderung der Einsichten zur Folge haben, die sich daraus ergeben, daß genau gerade Zahlen kongruent 0 modulo 2 sind. Wesentlich wird dies aber erst bei der Behandlung des inneren Produkts (zwei Mengen von Kanten sind genau dann orthogonal, wenn die Mächtigkeit ihres Durchschnitts gerade - also kongruent 0 modulo 2 - ist), welches jedoch nicht Unterrichtsgegenstand ist.

Problemfreudigkeit, Anschaulichkeit und Anwendungsfreudigkeit der Graphentheorie sollen folgendermaßen zur Geltung gebracht werden:

Als Einstieg werden drei Probleme (Königsberger Brückenproblem, ein Problem, das auf Eulersche Linien führt, und ein Problem, zu dem sich nicht in offensichtlicher Weise ein Graph finden läßt) gewählt. Graphentheoretische Begriffe sollen - soweit möglich - anschaulich dargestellt und interpretiert werden. Beim Beweis der Sätze soll parallel zur Durchführung des Beweises ein Beispiel (in anschaulicher Darstellung) behandelt werden. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn der Beweis einen Algorithmus enthält. Die gleichzeitige Behandlung von Algorithmus und Beispiel erleichtert - vor allem schwächeren Schülern - das Verstehen des Algorithmus und die Überlegungen zu seiner Wirksamkeit. Als Abschluß der Unterrichtsreihe sollen die Schüler das erarbeitete graphentheoretische Wissen bei der Lösung von Problemen anwenden.

3.4. Groblernziele

Aus den didaktischen Überlegungen ergeben sich folgende Groblernziele:

(LZ I) Die Schüler sollen die Charakterisierung von Euler-Graphen und von Graphen, die eine Eulersche Linie enthalten, sowie die zum Beweis benutzten Begriffe, Sätze und deren Beweisideen kennen und sich diese Sachverhalte veranschaulichen können.

(LZ II) Die Schüler sollen die Anwendungen von Begriffen und Sätzen der linearen Algebra bei der Charakterisierung von Euler-Graphen und von Graphen, die eine Eulersche Linie enthalten, kennen.

(LZ III) Die Schüler sollen Probleme durch Anwendung graphentheoretischer Resultate lösen können.

4. Methodische Überlegungen

4.1. Genetische Darstellung der Unterrichtsgegenstände

Die Vertreter der genetischen Methode sind der Auffassung, "daß die Mathematik nur über den Prozeß der Mathematisierung richtig verstanden und erlernt werden kann, nicht als Fertigfabrikat." [1] Die ausgewählten Unterrichtsgegenstände sollen genetisch dargestellt werden; die Darstellung soll jedoch nicht der historischen Entwicklung folgen [2], sondern soll für die Schüler eine "Wiederentdeckung unter Führung" [3] sein.

Wittmann charakterisiert genetische Darstellungen durch:

"Anschluß an das Vorverständnis der Adressaten,
Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik,
Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus,
Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze,
durchgehende Motivation und Kontinuität,
während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerungen." [4]

Das erste Merkmal ist insoweit erfüllt, als mit der Einbeziehung linearer Algebra den Schülern bekannte Unterrichtsgegenstände aufgegriffen werden. Verständnis für Graphentheorie muß jedoch erst geweckt werden. Durch die im ersten Abschnitt beschriebene Einbettung der Unterrichtsgegenstände in weitergehende graphentheoretische Überlegungen und durch die inhaltliche Anbindung an die lineare Algebra ist auch das zweite Merkmal erfüllt. Die Begriffe Graph und Euler-Graph sollen aus drei verschiedenen Problemen heraus entwickelt werden, um die Probleme mathematisch behandeln zu können (Merkmal 3).
Das vierte Merkmal tritt an zwei Stellen in der Unterrichtsreihe hervor. Von Versuchen, das Königsberger Brückenproblem durch Probieren zu lösen, über die Definition des Graphen, das Vermuten und Beweisen von Satz 1 bis zur Lösung des Problems

---

1 Wittmann, [23], S.98
2 vgl. Wittmann, [23], S.100
3 Freudenthal, [10], S.14
4 Wittmann, [23], S.98

durch die Kontraposition von Satz 1 werden die zuerst intuitiven und heuristischen Überlegungen strenger und abstrakter. Dies läßt sich auch bei der Erarbeitung der zum Beweis von Satz 7 benötigten Sätze durchführen. Ausgangspunkt ist die Konstruktion aller Kreise und Zyklen in einigen Graphen. Das Vermuten von Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen soll zur Formulierung der Sätze führen, die dann zu beweisen sind. Die im fünften Merkmal geforderte durchgehende Motivation wird durch die frühe Angabe des Ziels der Unterrichtsreihe (Beweis der Umkehrung von Satz 1) erreicht, ebenso ergibt sich durch das selbständige Vermuten von Sätzen für die Schüler eine Motivation zum Beweis der Sätze [1]. Das sechste Merkmal wird durch das Übergehen von der Lösung eines Problems (Königsberger Brückenproblem) zur Lösung einer Klasse von Problemen (Charakterisierung der Euler-Graphen) erfüllt.

4.2. Gliederung der Unterrichtsreihe

Die Unterrichtsreihe kann in drei Phasen gegliedert werden:

1. Einführung der Grundbegriffe der Graphentheorie, Lösung des Königsberger Brückenproblems durch Satz 1,
2. Einführung von Kreisen und Zyklen, Untersuchung der Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen, Beweis der Umkehrung von Satz 1,
3. Anwendung auf Eulersche Linien, Anwendung durch Lösen von Problemen.

Die erste Phase dient dem Problemaufwurf und soll die Schüler für die zweite Phase, die die hauptsächlichen Teile der Stofferarbeitung enthält, motivieren. Die dritte Phase dient der Sicherung der wesentlichen Lernergebnisse.

Die drei Phasen entsprechen den von Wittmann formulierten Standpunkten bei der Mathematisierung. Nach Wittmann können "während der Mathematisierung in bezug auf Wirklichkeit und

---

[1] "Sachbezogene Motivation läßt sich am ehesten erreichen über die Gestaltung einer Ausgangssituation, die problemlösendes oder kreatives Verhalten von Schülern herausfordert." (Brunnhuber,[5],S.28)

Mathematik wechselnde Standpunkte eingenommen werden" [1], die er durch spezifische Aktivitäten charakterisiert:

"(1) Schaffung und Weiterentwicklung mathematischer Instrumente
Im Mittelpunkt der Aktivität steht hier die Auseinandersetzung mit neu aufgetauchten Problemen der Wirklichkeit oder der Mathematik. Zur Lösung dieser Probleme wird ein mathematischer Apparat ... entwickelt ...

(2) Begrifflich-strukturelle Analyse ...
Bei dieser Aktivität wird ein Standpunkt eingenommen, bei dem die Betrachtung der ursprünglichen Probleme in den Hintergrund rückt. Die Aufmerksamkeit richtet sich auf ein gemäß (1) entwickeltes Instrumentarium oder mehrere Instrumentaria , die dazu von den konkreten Problemkontexten gelöst werden ...

(3) Anwendung
Gegebene mehr oder weniger präzise Instrumentaria bzw. Strukturen können auf die Untersuchung spezieller Probleme in vertrauten Bereichen oder auf neue Bereiche angewandt werden ..." [2]

4.3. Feinlernziele

Die in 3.4. aufgestellten Groblernziele werden durch folgende Feinlernziele konkretisiert:

Die Schüler sollen

(LZ 1) die Definition des Graphen nennen und anschaulich interpretieren können (LZ I) [3],

(LZ 2) einen Graphen konstruieren und als Figur darstellen können (LZ I),

(LZ 3) die Definition des Euler-Graphen nennen und anschaulich interpretieren können (LZ I),

(LZ 4) einen Euler-Graphen konstruieren und dies durch Angabe einer Folge beweisen können (LZ I),

(LZ 5) Satz 1 und die Beweisidee nennen können (LZ I),

(LZ 6) die Definition des Wegs nennen und anschaulich interpretieren können (LZ I),

(LZ 7) feststellen können, ob eine Teilmenge der Kantenmenge eines Graphen ein Weg ist (LZ I),

---

[1] Wittmann,[23],S.107
[2] Wittmann,[23],S.107-108
[3] In Klammern ist das Groblernziel angegeben, dem das Feinlernziel zugeordnet ist.

(LZ 8) die Definition des Zusammenhangs nennen und anschaulich interpretieren können (LZ I),

(LZ 9) die Definition des Kreises nennen und anschaulich interpretieren können (LZ I),

(LZ 10) feststellen können, ob eine Teilmenge der Kantenmenge eines Graphen ein Kreis ist (LZ I),

(LZ 11) die Definition des Zyklus nennen können (LZ I),

(LZ 12) feststellen können, ob eine Teilmenge der Kantenmenge eines Graphen ein Zyklus ist (LZ I),

(LZ 13) Vermutungen über Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen nennen können (LZ I),

(LZ 14) beweisen können, daß $(\mathcal{R}(M), \triangle, \{0,1\}, \odot)$ ein $\{0,1\}$-Vektorraum ist (LZ II),

(LZ 15) die symmetrische Differenz von disjunkten und nichtdisjunkten Mengen von Kanten bilden können (LZ II),

(LZ 16) Satz 2 und die Beweisidee nennen können (LZ I),

(LZ 17) Satz 3 und die Beweisidee nennen können (LZ I,II),

(LZ 18) beweisen können, daß die Menge der Zyklen ein Unterraum von $\mathcal{R}(K)$ ist (LZ II),

(LZ 19) Satz 4 und die Beweisidee nennen können (LZ I),

(LZ 20) nach dem im Beweis von Satz 4 gegebenen Algorithmus zu einem Zyklus einen darin enthaltenen Kreis konstruieren können (LZ I),

(LZ 21) Satz 5 und die Beweisidee nennen können (LZ I,II),

(LZ 22) nach dem im Beweis von Satz 5 gegebenen Algorithmus zu einem Zyklus eine Menge disjunkter Kreise konstruieren können, deren Vereinigung der Zyklus ist (LZ I,II),

(LZ 23) Satz 6 und die Beweisidee nennen können (LZ I),

(LZ 24) nach dem im Beweis von Satz 6 gegebenen Algorithmus in einem in disjunkte Kreise zerlegten Graphen eine Folge konstruieren können, die zeigt, daß der Graph ein Euler-Graph ist (LZ I),

(LZ 25) Satz 7 und die Beweisidee nennen können (LZ I,II),

(LZ 26) die Definition der Eulerschen Linie nennen und anschaulich interpretieren können (LZ I),

(LZ 27) Satz 8 und die Beweisidee nennen können (LZ I),

(LZ 28) zu einem Problem einen Graphen konstruieren können, der dem Problem entspricht (LZ III), (LZ 29) die Problemstellung auf den dem Problem zugeordneten Graphen übertragen können (LZ III),

(LZ 30) die Problemstellung unter Anwendung der Sätze 7 und 8 lösen können (LZ III),

(LZ 31) die Probleme beschreiben können, die mit Hilfe des behandelten Stoffs zu lösen sind (LZ III).

4.4. Unterrichtsverfahren

Der Umfang der Unterrichtsgegenstände bedingt angesichts der zur Verfügung stehenden Zeit eine straffe Führung des Unterrichts. Um trotzdem eine intensive Beschäftigung der Schüler mit dem behandelten Stoff zu erreichen, soll häufig die Unterrichtsform Gruppenarbeit gewählt werden [1]. Damit soll auch eine stärkere Beteiligung derjenigen Schüler am Unterrichtsgeschehen erreicht werden, die sich am Unterrichtsgespräch nicht oder selten beteiligen. Eine Einflußnahme auf die Zusammensetzung der Gruppen soll auch weiterhin nicht erfolgen, da diese bisher nie die Lernprozesse der Schüler behindert hat. Auch soll den Schülern - angesichts des Nichtvorhandenseins eines Klassenverbands - die Möglichkeit zu häufiger Zusammenarbeit gegeben werden.

Die Begriffe sollen vom Lehrer eingeführt werden. Da die Unterrichtsreihe mehr auf die Untersuchung von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten als auf deren Begriffsbildung zielt, ist dieses Vorgehen notwendig, um in der verfügbaren Zeit die Beziehungen ausführlich behandeln zu können.

Für die Erarbeitung der Beweise kommen die Unterrichtsformen Lehrervortrag, Unterrichtsgespräch, Partnerarbeit und Gruppenarbeit in Betracht. Dabei kann die Durchführung des Beweises und die Betrachtung eines Beispiels in verschiedenen Unterrichtsformen erfolgen. Von den möglichen Kombinationen sollen drei durchgeführt werden: Erarbeitung von Beweis und Beispiel im Unterrichtsgespräch, Behandlung des Beispiels im Unterrichtsgespräch und Erarbeitung des Beweises in Gruppenarbeit

---

[1] vgl. Brunnhuber, [5], S.40-50 ("Prinzip der Aktivierung")

sowie Vortrag des Beispiels durch den Lehrer und Erarbeitung des Beweises in Gruppenarbeit. Diese Formen werden gewählt, da sie den Schülern bekannt sind und ein größerer Zeitverlust nicht zu erwarten ist. Ein Ausgleich in der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit ist nicht möglich, weil die Unterrichtsreihe nicht verlängert werden kann. Die Erarbeitung von Satz 4 im Unterrichtsgespräch (4.Doppelstunde) und von Satz 5 in Lehrervortrag und Gruppenarbeit (5.Doppelstunde) wird zum Vergleich ausführlich beschrieben.

Da die Schüler während der Durchführung der Unterrichtsreihe Klausuren in beiden Leistungskursen und in einigen Grundkursen schreiben, kann nicht mit intensiver Arbeit außerhalb der Unterrichtszeit gerechnet werden. Dies ist angesichts der Bedeutung der Noten für Schüler der Oberstufe verständlich. Hinzu kommt, daß die Unterrichtsreihe kurz vor den Weihnachtsferien durchgeführt wird (die 7.Doppelstunde ist am letzten Schultag). Daher soll die Stellung arbeitszeitintensiver Hausaufgaben vermieden werden.

Die Schüler schreiben im Fach Mathematik zwei Klausuren in diesem Halbjahr. Die zweite Klausur wird am 9.12.1976 geschrieben. Da zu dieser Zeit erst zwei Doppelstunden der Unterrichtsreihe stattgefunden haben, können keine interessanten Aufgaben aus dem Stoffgebiet der Unterrichtsreihe gestellt werden. Wegen der von den Schülern kurz vor Beginn der Weihnachtsferien zu schreibenden Kursarbeiten, ist die Belastung der Schüler durch einen zusätzlichen Test nicht angebracht. Eine Überprüfung der Lernergebnisse soll daher durch das Lösen von Problemen in Gruppenarbeit zum Abschluß der Unterrichtsreihe erfolgen.

4.5. Unterrichtsmittel

Für das Thema unter dem hier gewählten Aspekt stehen weder Schulbücher noch andere geeignete Bücher zur Verfügung. Da Graphentheorie für die Schüler ein völlig neuer Stoff ist und in kurzer Zeit eine nicht geringe Anzahl von Definitionen und Sätzen erarbeitet wird, ist die Anfertigung eines Textbuchs notwendig. Dadurch wird den Schülern das Auffinden von benötigten Definitionen oder Sätzen erleichtert. Um zu erreichen, daß die Schüler nicht jeden Tafelanschrieb oder jede Bemerkung des Lehrers mitschreiben, soll das Textbuch ausführlich gestaltet werden. Dies hat auch zur Konsequenz, daß die Schüler spätestens nach jeder Stunde die Teile des Textbuchs erhalten, die den behandelten Stoff darstellen. Die Textbuchteile sollen jedoch nicht vor den Stunden an die Schüler verteilt werden, um die Konzentration der Schüler nicht vom Unterrichtsgeschehen abzulenken. Das Textbuch soll auch an geeigneten Stellen im Unterricht als Arbeitsmaterial eingesetzt werden.

Vorbereitete Folien für den Tageslichtprojektor sollen zur Darstellung von Veranschaulichungen dienen. Neben einer besseren Wirkung (Bekanntheit der Veranschaulichungen, da einige Graphen während der gesamten Unterrichtsreihe auftreten) wird damit eine effektivere Nutzung der Unterrichtszeit (Einsparung der Zeit für sonst erforderliche Tafelanschriebe) erreicht.

5. Planung und Durchführung

5.1. Erste Doppelstunde

5.1.1. Planung

Lernziele: LZ 1, LZ 2, LZ 3, LZ 4, LZ 5

Nach Erläuterung der Probleme 1,2 und 3 durch den Lehrer (anhand von Folie 1) erhalten die Schüler die Seite 1 des Textbuchs und sollen in Gruppenarbeit nach Lösungen und Gemeinsamkeiten der Probleme suchen. Es wird erwartet, daß die Schüler die Probleme 1 und 3 lösen und als Gemeinsamkeit der Probleme ein "Durchfahren" feststellen.

Nach Auswertung der Gruppenarbeit soll im Lehrervortrag die Definition des Graphen aus einer Figur (Beispiel 1) entwickelt werden. In Partnerarbeit sollen die Schüler ein eigenes Beispiel konstruieren, gemäß der Definition aufschreiben und als Figur darstellen. Nach Auswertung der Partnerarbeit sollen im Unterrichtsgespräch Graphen zu den Problemen 1 und 2 konstruiert werden und die Idee für die Konstruktion eines Graphen zu Problem 3 erarbeitet werden. Die Konstruktion dieses Graphen soll Hausaufgabe sein. Zur Übertragung der Problemstellung von Problem 2 auf den entsprechenden Graphen soll im Unterrichtsgespräch für den Graphen aus Beispiel 2 eine Folge von durchlaufenen Ecken und Kanten angegeben werden, in der die erste und letzte Ecke gleich sind, und vom Lehrer soll die Definition des Euler-Graphen gegeben werden. In Partnerarbeit sollen die Schüler einen Euler-Graphen konstruieren und eine Folge angeben, die die Bedingungen der Definition 2 erfüllt.

Nach Auswertung der Partnerarbeit soll im Unterrichtsgespräch Satz 1 erarbeitet werden. Der Satz soll von den Schülern aufgrund der behandelten Beispiele vermutet werden. Es ist jedoch möglich, daß dazu ein Hinweis des Lehrers erforderlich ist. Gegebenenfalls soll nach Beziehungen zwischen Ecken und Kanten gefragt werden. Die Beweisidee soll von den Schülern anschaulich formuliert werden. Die Konsequenzen für Problem 2 sollen im Unterrichtsgespräch erarbeitet werden. Vom Lehrer soll dann die von Euler formulierte allgemeinere Problemstellung erläutert werden. Im Unterrichtsgespräch soll erarbeitet werden, daß der Beweis der Umkehrung von Satz 1 dieses Problem lösen würde.

Hausaufgabe soll die Konstruktion eines Graphen zu Problem 3 und die Erarbeitung des Beweises von Satz 1 sein.
Die Schüler erhalten die Seiten 2, 4 und 5 des Textbuchs.

Tafelbild:

Beispiel 1	Definition Graph Definition Euler-Graph	Beispiel 2

Schülerbeispiel Euler-Graph	Schülerbeispiel Graph

Tageslichtprojektor:
Probleme 1, 2 und 3 (Folie 1)
Graphen zu den Problemen 1 und 2 (Folie 1)
Satz 1

5.1.2. Durchführung

Der Unterricht fand nicht im Physik-Übungsraum statt.
Es fehlten: GT, IH und UB.

Nach Erläuterung der Probleme 1, 2 und 3 arbeiteten die Schüler in folgenden Gruppen:

1) AP, BS, DS, GH und RH,
2) BW, GM und SE,
3) CS, DK, HT und UP,
4) PS, SL und SR,
5) BO und MK.

Zur Auswertung der Gruppenarbeit trug BS die Lösung von Problem 1 vor. BW und HT erläuterten die beiden Lösungen von Problem 3; GM betonte, daß die Methode in beiden Fällen gleich sei. Zu Problem 2 vermutete BO, daß es nicht lösbar sei.

L: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Problemen?

GM: Es sind Aufgaben mit Einschränkungen.

L: (fährt mit einem Zeigestock auf den Problemdarstellungen der Folie 1 entlang)

AP: Es geht darum, Wege zu finden.

RH: Es gibt immer einen Anfangs- und einen Zielpunkt. Dazwischen muß eine bestimmte Strecke zurückgelegt werden.

PS: Es muß eine bestimmte Reihenfolge durchlaufen werden.

Anhand der Darstellung des Graphen von Beispiel 1 entwickelte der Lehrer die Definition des Graphen. Im Unterrichtsgespräch wurde für den Graphen von Beispiel 1 aus der Darstellung die Eckenmenge, die Kantenmenge und die Abbildung p bestimmt. BS gab eine Zusammenfassung, in der sie die Beziehungen zwischen einem Graph und seiner Darstellung hervorhob. In Partnerarbeit konstruierten die Schüler Graphen. Zur Auswertung schrieb BO ihr Beispiel an die Tafel. DS brachte als Beispiel einen Graphen, dessen Eckenmenge einelementig und dessen Kantenmenge leer war; DK betrachtete die Vereine der Fußball-Bundesliga als Ecken und jede Spielpaarung eines gegebenen Spieltages als Kante mit den beiden beteiligten Vereinen als Endpunkten.

Vom Lehrer wurde die Frage nach den Beziehungen zwischen Graphen und den Problemen gestellt. Zu Problem 1 schlug GM vor, die Endpunkte der Strecken als Ecken und die Strecken als Kanten mit entsprechenden Endpunkten zu betrachten. Der Vorschlag wurde vom Lehrer auf eine über Folie 1 gelegte Folie gezeichnet. Zu Problem 2 schlug PS vor, die Brücken als Ecken und die Spazierwege als Kanten zu betrachten, GH und DS meinten, man könne die vier durch den Fluß voneinander getrennten Gebiete als Ecken und jede mögliche Verbindung zweier Gebiete über eine Brücke als Kante nehmen. Nach Übertragung der Problemstellungen auf die Graphen von Problem 1 und 2 durch DS, GM, PS und RH wurde von BO der Unterschied zwischen den beiden Vorschlägen herausgearbeitet. Der Lehrer schlug dann vor, den von GH und DS beschriebenen Graphen zu behandeln, da sich so eine ähnliche Problemstellung für die Graphen von Problem 1 und 2 ergäbe. Zu Problem 3 kamen Vorschläge von BO, GM und HT, die jedoch nicht auf eine Lösung des Problems führten. Daher wurde vom Lehrer der Vorschlag gemacht, die Konstruktion eines Graphen zu Problem 3 als Schülerreferat in der nächsten Stunde zu behandeln. BS und UP waren bereit, das Referat zu übernehmen; sie einigten sich dann auf BS.

Der Lehrer schrieb den Graphen von Beispiel 2 an die Tafel. Auf die Frage, ob man alle Kanten durchlaufen und zur Anfangsecke zurückkehren könne, nannte GH eine Folge von Kanten, die dies bestätigte. Auf Vorschlag des Lehrers sollte das Durchlaufen durch eine Folge von Ecken und Kanten beschrieben werden. HT diktierte eine solche Folge. Vom Lehrer wurde anhand dieser Folge die Definition des Euler-Graphen entwickelt, wobei die Bedingung $e_1 = e_{n+1}$ vergessen wurde. Bei der anschaulichen Interpretation der Definition bemerkte CS, daß vom Zurückkehren zur Anfangsecke nichts in der Definition stände, die daraufhin berichtigt wurde. In Partnerarbeit entwickelten die Schüler eigene Beispiele für Euler-Graphen und deren Folgen. Zur Auswertung schrieb BS ihr Beispiel an die Tafel.

L: Kann man einen Euler-Graphen auf Anhieb erkennen?

RH: Ich kann das nicht.

GM: Hat das was mit geraden und ungeraden Zahlen zu tun? In Problem 2 geht es nicht, weil da eine Ecke ist, zu der laufen drei Kanten. Bei dem Beispiel darunter sind es zwei oder vier Kanten. Ich habe hier etwas ausprobiert und da haben die Ecken jedesmal zwei oder vier Kanten. Wenn das nicht so ist, kommt man an der Ecke an, aber nicht mehr weg.

L: (demonstriert dies an den Beispielen)
Wie könnte man GMs Vorschlag als Satz formulieren?

UP: Wenn ein Graph ein Euler-Graph ist, hat jede Ecke eine gerade Anzahl von Kanten.

L: (schreibt Satz 1 auf eine Folie)
Was ist hierbei die Voraussetzung, was ist die Behauptung?

SL: Voraussetzung ist, daß der Graph ein Euler-Graph ist, und Behauptung ist, daß jede Ecke Endpunkt einer geraden Anzahl von Kanten ist.

L: Und wie beweist man das?

RH: Wie GM das gesagt hat. Jede Kante tritt in der Folge auf, weil das ein Euler-Graph ist. Wenn eine Ecke drei Kanten hat, kommt man zur Ecke hin und wieder weg, auf der dritten Kante wieder hin, aber nicht mehr weg, weil man die beiden anderen Kanten schon durchlaufen hat.

Die Frage nach der Bedeutung von Satz 1 für die Lösung von Problem 2 wurde von den Schülern nicht sofort richtig beantwortet. Da eine weitere Behandlung aus Zeitgründen nicht möglich war, wurde als Hausaufgabe das Erarbeiten des Beweises von Satz 1 und der Anwendung des Satzes auf Problem 2 (zweiter Teil der Seite 5 des Textbuchs) gestellt.

Die Schüler erhielten die Seiten 2, 4 und 5 des Textbuchs. BS erhielt zur Vorbereitung des Referats die Seite 3 des Textbuchs und die Folie 2.

5.1.3. Bemerkungen

In der Gruppenarbeit stand für die Schüler die Suche nach Lösungen der Probleme so stark im Vordergrund, daß Gemeinsamkeiten der Probleme kaum diskutiert wurden. Die erwarteten Äußerungen kamen erst nach einem Hinweis des Lehrers. Bei der Bestimmung eines Graphen zu Problem 2 wurde es notwendig, an dieser Stelle die Problemstellungen auf die Graphen zu übertragen, da daran zu entscheiden war, welcher Vorschlag weiter behandelt werden sollte. Die Konstruktion eines Graphen zu Problem 3 wurde nicht als Hausaufgabe gegeben, da aus Zeitgründen die Bereitstellung der dafür erforderlichen Informationen nicht möglich war. Herausragend war die Vermutung von Satz 1 durch GM, ohne daß ein Hinweis des Lehrers erfolgte; sie formulierte gleichzeitig die Beweisidee. Die Anwendung von Satz 1 auf Problem 2 wurde von den Schülern nicht gesehen, da sie die Kontraposition des Satzes nicht beachteten. Aus Zeitgründen konnte dies in der Unterrichtsstunde nicht weiter behandelt werden und wurde deshalb als Hausaufgabe gestellt. Neben der herausragenden Mitarbeit von GM ist auch die Beteiligung von BS, die sich sonst kaum am Unterricht beteiligte, bemerkenswert.

Die Lernziele wurden alle erreicht. Dies wurde durch Schülerbeiträge und bei den Lernzielen LZ 2 und LZ 4 durch Beobachtung der Partnerarbeit überprüft.

5.2. Zweite Doppelstunde

5.2.1. Planung

Lernziele: LZ 6, LZ 7, LZ 8, LZ 9, LZ 10, LZ 11, LZ 12

Um die in der ersten Doppelstunde fehlenden Schüler möglichst schnell am Unterricht beteiligen zu können, soll mit der Wiederholung der Seiten 1, 2 und 4 des Textbuchs begonnen werden. Dadurch soll erreicht werden, daß alle Schüler dem Referat über die Konstruktion eines Graphen zu Problem 3 folgen können. Anschließend soll die Seite 5 des Textbuchs besprochen werden und vom Lehrer das weitere Vorgehen skizziert werden.

Anhand von Beispiel 3 soll im Lehrervortrag die Definition des Wegs entwickelt werden. In Gruppenarbeit sollen die Schüler zwei Teilmengen der Kantenmenge des Graphen von Beispiel 2 daraufhin überprüfen, ob sie Wege sind, und selbst einen Weg mit dazugehöriger Wegfolge in diesem Graphen bestimmen. Weiter sollen sich die Schüler Definition 4 und Beispiel 4 erarbeiten. Dazu erhalten sie die Seite 6 des Textbuchs. Nach Auswertung der Gruppenarbeit soll vom Lehrer begründet werden, warum im folgenden nur zusammenhängende Graphen betrachtet werden sollen, die als Graphen bezeichnet werden.

Im Lehrervortrag soll anhand von Beispiel 5 die Definition des Kreises gegeben werden. Dabei sollen die Zusammenhänge mit der Definition des Euler-Graphen herausgestellt werden. Im Unterrichtsgespräch soll von den Schülern eine anschauliche Interpretation des Begriffs gegeben werden. In Gruppenarbeit sollen die Schüler im Graphen von Beispiel 2 zwei Teilmengen der Kantenmenge daraufhin überprüfen, ob sie Kreise sind, selbst einen Kreis mit dazugehöriger Wegfolge in diesem Graphen bestimmen und die Definition des Kreises ohne Benutzung des Begriffs Weg aufschreiben.

Nach Auswertung der Gruppenarbeit soll als Hausaufgabe die

Bestimmung aller Kreise in den Graphen von Beispiel 5 und 2, die Erarbeitung des Begriffs Zyklus anhand der Seite 7 des Textbuchs und die Bestimmung aller Zyklen im Graphen von Beispiel 5 gestellt werden.
Die Schüler erhalten die Seiten 3 und 7 des Textbuchs und die Arbeitsbögen 1 und 2.

Tafelbild:

Beispiele für Wege	Beispiel 3 Definition Weg Beispiel 5 Definition Kreis	Beispiele für Kreise

Tageslichtprojektor:
Problem 3 (Folie 2)
Beispiel 3 (Folie 3, Feld 1)
Beispiel 2 (Folie 3, Feld 2)
Beispiel 5 (Folie 3, Feld 3)
Beispiel 2 (Folie 3, Feld 2)

5.2.2. Durchführung

Der Unterricht fand im Physik-Übungsraum statt.
Es fehlte: UB.

Da von den in der ersten Doppelstunde fehlenden Schülern nur IH anwesend war (GT kam verspätet) und sie das Textbuch gelesen hatte, wurde mit dem Referat begonnen. Das Referat wurde von BS anhand von Folie 2, bei der jedes Feld einzeln verdeckt werden konnte, als Unterrichtsgespräch durchgeführt. Eine Zusammenfassung des Lösungsverfahrens von Problem 3 und die Beschreibung der Überfahrten gaben GT und UP.

MK wiederholte den Stoff der Seiten 1, 2 und 4 des Textbuchs. HT und RH beschrieben den Beweis von Satz 1. Aufgrund einer Bemerkung von UP ergab sich eine Diskussion über einen Beweisschritt. Der zweite Teil der Seite 5 wurde im Unterrichtsgespräch behandelt. CS faßte die logische Struktur von Satz 1 und der dazu äquivalenten Aussage zusammen.

Nach einem Überblick über das weitere Vorgehen beim Beweis der Umkehrung von Satz 1 wurde vom Lehrer die Definition des Wegs anhand von Beispiel 3 entwickelt. AP und GT faßten zusammen, was von einer Teilmenge der Kantenmenge gezeigt werden muß, um festzustellen, ob sie ein Weg ist. Die Schüler erhielten die Seite 6 des Textbuchs und sollten in Gruppenarbeit untersuchen, ob die Mengen $\{k_2, k_4, k_6\}$ und $\{k_1, k_2, k_3\}$ im Graphen von Beispiel 2 Wege sind, einen weiteren Weg mit dazugehöriger Wegfolge in diesem Graphen bestimmen und sich Definition 4 und Beispiel 4 erarbeiten. Die Schüler arbeiteten im folgenden Gruppen:

1) BW, DK, DS, PS, RH und SE,
2) BO und MK,
3) AP, CS, GH und GM,
4) BS, HT, IH und UP,
5) GT, SL und SR.

SE und GH erläuterten, daß $\{k_2, k_4, k_6\}$ ein Weg bzw. $\{k_1, k_2, k_3\}$ kein Weg im Graphen von Beispiel 2 ist. Nach einer kurzen Diskussion über die Frage, was von einer Teilmenge der Kantenmenge zu zeigen ist, damit sie kein Weg ist, gab SL einen weiteren Weg mit Wegfolge an. Der Begriff Zusammenhang wurde von DS, HT und IH erläutert und anschaulich interpretiert. Vom Lehrer wurde begründet, warum nur zusammenhängende Graphen behandelt werden sollen. PS gab eine Zusammenfassung der neuen Begriffe.

Die Schüler erhielten die Seite 3 des Textbuchs.

5.2.3. Bemerkungen

Die Durchführung des Referats am Beginn der Stunde ermöglichte es, die Wiederholung, die Besprechung der Seite 5 des Textbuchs und die sich daran inhaltlich anschließenden Unterrichtsgegenstände zusammenhängend zu behandeln. Da das Referat länger als geplant war (25 statt 15 Minuten) und die Wiederholung und Besprechung der Seite 5 des Textbuchs ebenfalls länger dauerte (30 statt 20 Minuten), konnte die Definition des Kreises nicht mehr behandelt und daher die vorgesehene Hausaufgabe nicht gestellt werden.

Die Lernziele LZ 6, LZ 7 und LZ 8 wurden erreicht. Dies wurde durch Schülerbeiträge und beim Lernziel LZ 7 durch Beobachtung der Gruppenarbeit überprüft. Die Lernziele LZ 9 und LZ 10 konnten aus Zeitgründen nicht erreicht werden. Die Lernziele LZ 11 und LZ 12, die durch die Hausaufgabe erreicht werden sollten, wurden ebenfalls nicht erreicht.

5.3. Dritte Doppelstunde

5.3.1. Planung

Lernziele: LZ 9, LZ 11, LZ 12, LZ 10, LZ 13, LZ 14, (LZ 16)

Da die zweite Doppelstunde elf Tage zurückliegt, soll von den Schülern in einer Wiederholung eine anschauliche Interpretation der bisher behandelten Unterrichtsgegenstände (Graph, Euler-Graph, Satz 1, Weg, Zusammenhang) gegeben werden. Anhand vom Beispiel 5 soll vom Lehrer die Definition des Kreises entwickelt werden. Dabei sollen die Zusammenhänge mit der Definition des Euler-Graphen herausgestellt werden. Im Unterrichtsgespräch soll von den Schülern eine anschauliche Interpretation des Begriffs gegeben werden. Aus Satz 1 soll die Definition des Zyklus im Lehrervortrag entwickelt werden. Auch hier sollen die Zusammenhänge mit Euler-Graphen betont werden. Im Unterrichtsgespräch sollen die Schüler feststellen, ob die drei Mengen von Kanten aus Beispiel 6 Zyklen sind. Unter Verwendung des Begriffs Zyklus sollen die Schüler Satz 1 und dessen Umkehrung umformulieren.

In Gruppenarbeit sollen die Schüler die Definition des Kreises ohne Benutzung des Begriffs Weg aufschreiben, in den Graphen von Beispiel 5 und Beispiel 2 alle Kreise und alle Zyklen bestimmen und Vermutungen über Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen aufstellen. Dazu erhalten die Schüler die Seite 7 des Textbuchs und die Arbeitsbögen 1 und 2. Auf den Arbeitsbögen können die Kreise und Zyklen als Figur anschaulich dargestellt werden. Weiter geht die Anzahl der Kreise und Zyklen daraus hervor. Durch das Bestimmen aller Kreise und aller Zyklen in zwei Graphen sollen die Schüler in die Lage versetzt werden, Vermutungen über die Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen aufzustellen. Es wird erwartet, daß die Schüler folgende Beziehungen vermuten: (i) Jeder Kreis ist ein Zyklus,

(ii) Jeder Zyklus enthält als Teilmenge einen Kreis und (iii) Jeder Zyklus ist Vereinigung disjunkter Kreise. Nicht erwartet werden kann, daß die Schüler Beziehungen bezüglich der symmetrischen Differenz vermuten. Für die erste Aufgabe erhält eine Gruppe eine Folie, auf der sie ihr Ergebnis festhalten soll. Die Auswertung der zweiten Aufgabe soll mit Hilfe der Folien 4 und 5 erfolgen. Die Kreise und Zyklen sind jeweils einzeln abgedeckt; die Abdeckung wird entfernt, wenn eine Gruppe die entsprechende Menge als Kreis bzw. als Zyklus bezeichnet. Dies ist ein zeitsparendes Verfahren, bei dem die Schüler ihre Ergebnisse nach und nach kontrollieren können. Damit die eventuell zeitaufwendige Korrektur der eigenen Aufzeichnungen während der Stunde entfallen kann, erhalten die Schüler die Ergebnisse nach der Stunde (Textbuchseiten 8 und 9). Die vermuteten Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen sollen an der Tafel festgehalten werden.

Im Unterrichtsgespräch sollen aus den Vermutungen der Schüler die Sätze 2, 4 und 5 formuliert werden. Weiter soll nach einem Hinweis des Lehrers auf die symmetrische Differenz Satz 3 vermutet werden.

Falls genügend Zeit zur Verfügung steht, soll Satz 2 im Unterrichtsgespräch bewiesen werden.

Als Hausaufgabe sollen die Schüler die Seite 10 des Textbuchs lesen und die Vektorraumbedingungen (i) - (iv) beweisen.
Die Schüler erhalten die Seiten 8, 9 und 10 des Textbuchs.

Tafelbild:

Definition Kreis Beispiel 5	Definition Zyklus Beispiel 6	Satz 2 Satz 3 Satz 4 Satz 5	Vermutete Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen

Tageslichtprojektor:
Definition Kreis ohne Benutzung des Begriffs Weg
Kreise und Zyklen (Folie 4, Folie 5)
Beweis Satz 2

5.3.2. Durchführung

Der Unterricht fand nicht im Physik-Übungsraum statt.

An der Wiederholung waren DK, GT, GM, PS, RH und UP beteiligt. Nach der Entwicklung der Definition des Kreises gaben GH, HT und IH eine anschauliche Interpretation des Begriffs. Im Anschluß an die Definition des Zyklus durch den Lehrer wurde Beispiel 6 im Unterrichtsgespräch behandelt. Satz 1 und seine Umkehrung wurden von CS und PS umformuliert.

Die Schüler arbeiteten in folgenden Gruppen:

1) AP, CS, GH, GT und RH,
2) BW, GM und SE,
3) BO, BS, MK und UB,
4) DK, DS und HT,
5) IH, PS, SL, SR und UP.

Gruppe 1 erhielt eine Folie für die erste Aufgaben. Zur Auswertung der ersten Aufgabe beschrieb GM (Gruppe 2) das anzuwendende Verfahren, CS (Gruppe 1) erläuterte die von ihrer Gruppe geschriebene Folie und MK (Gruppe 3) stellte den Unterschied zwischen Weg und Kreis heraus. Zur zweiten Aufgabe nannte UB (Gruppe 3) alle Kreise und SL (Gruppe 5) alle Zyklen im Graphen aus Beispiel 5; RH (Gruppe 1) nannte alle Kreise und SE (Gruppe 2) alle Zyklen im Graphen aus Beispiel 2. SE bemerkte dabei, daß alle Kreise auch Zyklen seien.

L: Welche Vermutungen über Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen haben Sie aufgestellt?

BS (Gruppe 3): Jeder Kreis ist ein Zyklus.

DK (Gruppe 4): Jeder Zyklus besteht aus einer Menge von Kreisen.

PS (Gruppe 5): Jeder Zyklus besteht aus mindestens einem Kreis.

BW (Gruppe 2): Jeder Zyklus ist Vereinigungsmenge von disjunkten Kreisen.

L: (schreibt die Vermutungen an die Tafel)
Ihre Vermutungen liefern uns Sätze, die wir benötigen, um die Umkehrung von Satz 1 beweisen zu können. Der erste Satz ist, daß jeder Kreis ein Zyklus ist. (TA: Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph. Satz 2: Sei $R \subset K$ ein Kreis. Dann ist R ein Zyklus.) Sehen Sie sich bitte die zweite und die vierte Vermutung an.

DS: Für die leere Menge gilt das nicht.

GM: Der Zyklus muß ungleich der leeren Menge sein.

BO: Die beiden Vermutungen besagen dasselbe.

L: Also jeder nichtleere Zyklus ist Vereinigung von disjunkten Kreisen. (TA: Satz 5: Sei $Z \subset K$, $Z \neq \emptyset$, ein Zyklus. Dann ist Z Vereinigung von disjunkten Kreisen.)

BS: Dann könnte Satz 2 wegfallen.

L: Den Satz werden wir brauchen, um Satz 5 beweisen zu können. Zur dritten Vermutung. Was soll 'besteht aus' bedeuten ?

IH: Es gibt mindestens einen Kreis, dessen Kanten alle im Zyklus sind.

UP: Der Kreis ist Teilmenge des Zyklus.

L: (TA: Satz 4: Sei $Z \subset K$, $Z \neq \emptyset$, ein Zyklus. Dann gibt es einen Kreis $R \subset Z$.)
Einen Satz haben Sie nicht vermutet. Wenn man disjunkte Kreise vereinigt, ergibt das einen Zyklus. Vereinigt man nicht disjunkte Kreise, so ergibt das nicht immer einen Zyklus.

BW: Man könnte den Durchschnitt von Kreisen nehmen.

GT: Wenn man im Beispiel 2 die Kreise $\{k_1,k_2,k_4\}$ und $\{k_1,k_2,k_5\}$ nimmt, dann ist der Durchschnitt kein Kreis und auch kein Zyklus.

L: Wir haben am Anfang des Schuljahres eine weitere Verknüpfung zwischen Mengen behandelt.

RH: Wir hatten das Delta genannt.

L: Symmetrische Differenz.

GT: Das war $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

BO: In dem Beispiel wäre das $\{k_4,k_5\}$; und das ist ein Kreis.

BS: Wenn man $\{k_2,k_3\} \triangle \{k_4,k_5\}$ bildet, ist das kein Kreis aber ein Zyklus.

L: Was könnte man vermuten ?

GT: Wenn man Kreise durch $\triangle$ verknüpft, so entsteht ein Zyklus.

BW: Vielleicht sind die Zyklen so etwas wie eine Gruppe, wenn man sie so verknüpft.

L: Man kann GTs Vorschlag allgemeiner formulieren. Verknüpft man zwei Zyklen durch die symmetrische Differenz, so erhält man einen Zyklus. (TA: Satz 3: Seien $Z, Z' \subset K$ Zyklen. Dann ist $Z \triangle Z'$ ein Zyklus.) Auf BWs Vorschlag werden wir dann auch zurückkommen.

DK gab eine Zusammenfassung der Unterrichtsgegenstände dieser Doppelstunde.

Die Hausaufgabe wurde wie geplant gestellt.

Die Schüler erhielten die Seiten 8, 9 und 10 des Textbuchs.

5.3.3. Bemerkungen

Die Lernziele LZ 9 bis LZ 13 wurden erreicht. Dies wurde durch Schülerbeiträge und bei den Lernzielen LZ 10, LZ 12 und LZ 13 durch Beobachtung der Gruppenarbeit überprüft. Das Lernziel LZ 14 soll durch die Hausaufgabe erreicht werden. Zur Behandlung des Beweises von Satz 2 fehlte die Zeit, daher wurde das Lernziel LZ 16 nicht erreicht.

5.4. Vierte Doppelstunde

5.4.1. Planung

Lernziele: LZ 16, LZ 15, LZ 18, LZ 19, LZ 20, (LZ 21, LZ 22)

In einer Wiederholung sollen die Schüler die Definitionen der Begriffe Kreis und Zyklus und die in der letzten Doppelstunde vermuteten Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen in einem Graphen nennen.

Der Beweis von Satz 2 soll im Unterrichtsgespräch erfolgen. Dabei soll von den Schülern herausgearbeitet werden, was zu zeigen ist. Die Fallunterscheidung soll vom Lehrer eingeführt werden; die weiteren Beweisschritte sollen Schülerbeiträge sein. Parallel zum Beweis soll im Graphen von Beispiel 2 der Kreis $\{k_1,k_3,k_4\}$ untersucht werden. In seiner Wegfolge $(e_1,k_3,e_2,k_4,e_3,k_1,e_1)$ treten die Ecken e_1, e_2 und e_3 auf, die Endpunkt von genau zwei Kanten des Kreises sind (e_1 von k_1 und k_3, e_2 von k_3 und k_4, e_3 von k_1 und k_4). Die Ecke e_4, die nicht in der Folge auftritt, ist Endpunkt keiner Kante des Kreises.

Anschließend soll von den Schülern die erste Hälfte der Seite 10 des Textbuchs zusammengefaßt werden und das Verfahren zum Beweis der Vektorraumbedingungen erläutert werden. Da das Besprechen des ganzen Beweises oder das Anschreiben einiger Beweiszeilen an die Tafel zu langwierig wäre, sollen drei Beweiszeilen auf der Folie 6 von Schülern begründet werden. Zur Anwendung auf Graphen sollen die Schüler in Partnerarbeit $\{k_1,k_3,k_4\} \triangle \{k_3,k_5,k_6,k_7\}$ und $\{k_1,k_6,k_7\} \triangle \{k_4,k_5\}$ im Graphen von Beispiel 2 berechnen. Das Ergebnis ist in beiden Fällen $\{k_1,k_4,k_5,k_6,k_7\}$ und dient als Beispiel für den letzten

Absatz der Seite 10 des Textbuchs. Zur Veranschaulichung soll Folie 5 dienen.

Der Beweis von Satz 3 soll im Unterrichtsgespräch erarbeitet werden. Parallel zum Beweis soll im Graphen von Beispiel 2 die symmetrische Differenz der Zyklen $\{k_1,k_2,k_3,k_6,k_7\}$ und $\{k_1,k_4,k_5,k_6,k_7\}$ betrachtet werden. Für die sich ergebende Menge $\{k_2,k_3,k_4,k_5\}$ soll die Anzahl der Kanten mit Endpunkt e_1, e_2 bzw. e_4 nach dem im Beweis beschriebenen Berechnungsverfahren bestimmt und an der Figur (Folie 5) verglichen werden. Dann soll der Vorschlag, den BW in der letzten Doppelstunde machte, aufgegriffen werden. In Partnerarbeit sollen die Schüler beweisen, daß die Menge der Zyklen in einem Graphen ein Unterraum des Vektorraums der Kantenmenge ist.

Im Unterrichtsgespräch soll Satz 4 bewiesen werden. Parallel zum Beweis soll im Graphen von Beispiel 2 (dessen Kantenmenge ein Zyklus ist) ein Kreis konstruiert werden. Zur Veranschaulichung soll Folie 3, Feld 2 dienen.

Als Hausaufgabe soll im Arbeitsbogen 3 die Aufgabe a) bearbeitet werden.

Falls genügend Zeit zur Verfügung steht, kann der Beweis von Satz 5 besprochen werden. Parallel dazu sollen im Graphen von Beispiel 2 disjunkte Kreise bestimmt werden, deren symmetrische Differenz die Kantenmenge ist. Als Hausaufgabe kann dann auch Aufgabe b) des Arbeitsbogen 3 gegeben werden. Alternativ könnte auch nur das Verfahren am Beispiel erläutert werden, was weniger Zeit beanspruchen würde. Das Erarbeiten des Beweises könnte dann Hausaufgabe sein.

Die Schüler erhalten die Seiten 11 und 12 des Textbuchs und den Arbeitsbogen 3.

Tafelbild (in zeitlicher Abfolge): Tageslichtprojektor:

Satz 2	Beispiel zu Satz 2

Folie 5

Folie 6

Satz 2		Aufgaben zu S.10 Textbuch	Folie 5

	Beispiel zu Satz 3 — Satz 3	Aufgaben zu S.10 Textbuch	Folie 5

Beispiel zu Satz 4	Satz 4 — Satz 3	Aufgaben zu S.10 Textbuch	Folie 3, Feld 2

Beispiel zu Satz 4	Satz 4 — Satz 5	Beispiel zu Satz 5	Folie 5

5.4.2. Durchführung

Der Unterricht fand nicht im Physik-Übungsraum statt.
Es fehlten: BW, SE und UP. DK, GH, GT und RH fehlten in der zweiten Stunde wegen einer Kursarbeit.

An der Wiederholung beteiligten sich DS, GH und SR. Der Beweis von Satz 2 erfolgte wie geplant. Bis auf die Fallunterscheidung wurden alle Beweisschritte von Schülern vorgeschlagen. An der Erarbeitung des Beweises beteiligten sich AP, BO, GM, HT, IH, MK und RH, an der Erarbeitung des Beispiels BS, DK und GT. IH gab eine Zusammenfassung des Beweises. RH faßte die erste Hälfte der Seite 10 des Textbuchs zusammen, CS erläuterte das Beweisverfahren und AP, DS und SL begründeten drei Beweiszeilen. Zur Auswertung der Partnerarbeit trugen MK und PS das Ergebnis der ersten bzw. zweiten Aufgabe vor und begründeten es. BO und HT faßten die zweite Hälfte der Seite 10 des Textbuchs zusammen. DS lieferte die Idee des Beweises von Satz 3. An der Erarbeitung des Beispiels beteiligten sich BS, CS und GM. BO gab eine Zusammenfassung des Beweises. In der Auswertung der Partnerarbeit wurde von BO und HT herausgearbeitet, daß Satz 3 die Abgeschlossenheit der Menge der Zyklen gegenüber der inneren Verknüpfung in $\mathcal{R}(K)$ bedeutet und daß dies zusammen mit der Abgeschlossenheit bezüglich der äußeren Verknüpfung zeigt, daß die Menge der Zyklen ein Unterraum von $\mathcal{R}(K)$ ist. HT und PS begründeten die Abgschlossenheit bezüglich der äußeren Verknüpfung.

L: Nun zu Satz 4. Sei $Z \subset K$, $Z \neq \emptyset$, ein Zyklus. Dann gibt es einen Kreis $R \subset Z$. (TA: Satz 4: $Z \subset K$, $Z \neq \emptyset$, Zyklus $\Rightarrow$ es gibt $R \subset Z$, R Kreis) Der Beweis ist gleichzeitig ein Konstruktionsverfahren zur Bestimmung eines Kreises. Als Beispiel betrachten wir in diesem Graphen die Kantenmenge K, die ein Zyklus ist. (Folie 3, Feld 2) Wenn $Z \neq \emptyset$ ist, gibt es eine Kante aus Z. Die bezeichnen wir mit k_1. Die Endpunkte von k_1 bezeichnen wir mit e_1 und e_2. (TA: Beweis: $k_1 \in Z$, Endpunkte: e_1, e_2) Z ist ein Zyklus.

BS: Dann muß es eine zweite Kante aus Z mit Endpunkt e_2 geben.

L: (TA: $k_2 \in Z$, Endpunkte: e_2, e_3) Wenn jetzt $e_3 = e_1$ ist, was hätte man dann ?

DS: Dann hätten wir einen Kreis.

L: (TA: $e_3 = e_1 \Rightarrow$ Kreis) Welche Kanten enthält er und welche Wegfolge gehört zu dem Kreis ?

HT: Die Kanten k_1 und k_2. Die Wegfolge ist $(e_1, k_1, e_2, k_2, e_3)$.

L: Im Beispiel habe ich k_6 gewählt, mit den Endpunkten e_4 und e_1. Als zweite Kante kann man k_3 mit den Endpunkten e_1 und e_2 nehmen. (TA: $k_6 \in K$, Endpunkte: e_4, e_1. $k_3 \in K$, Endpunkte: e_1, e_2)

BS: Es muß eine weitere Kante geben mit Endpunkt e_2.

L: Da habe ich k_4 mit den Endpunkten e_2 und e_3 gewählt. (TA: $k_4 \in K$, Endpunkte: e_2, e_3) Im allgemeinen Fall gibt es eine Kante k_3, wenn $e_3 \neq e_1$ ist.

AP: Mit den Endpunkten e_3 und e_4.

L: (TA: $k_3 \in Z$, Endpunkte: e_3, e_4) Wann hätte man einen Kreis bestimmt ?

HT: Wenn $e_4 = e_1$ ist.

GM: Oder wenn $e_4 = e_2$ ist.

L: (TA: $e_4 = e_1$ oder $e_4 = e_2 \Rightarrow$ Kreis)
Welchen Kreis und welcheWegfolge hätten wir dann ?

BO: $\{k_1,k_2,k_3\}$ als Kreis und $(e_1,k_1,e_2,k_2,e_3,k_3,e_1)$ als Wegfolge.

PS: Oder falls $e_4 = e_2$ ist, den Kreis $\{k_2,k_3\}$ mit der Wegfolge (e_2,k_2,e_3,k_3,e_2).

IH: e_1 müßte auch in der Folge auftreten.

BS: Nein, denn k_1 gehört nicht zum Kreis.

L: Nicht alle Kanten, die wir aufschreiben,müssen auch zu dem Kreis gehören. Und wenn $e_4 \neq e_1$ und $e_4 \neq e_2$ ist ?

DS: Dann gibt es eine Kante k_4 mit den Endpunkten e_4 und e_5.

L: (TA: $k_4 \in Z$, Endpunkte: e_4, e_5)
Im Beispiel wähle ich k_1 mit den Endpunkten e_3 und e_1.
(TA: $k_1 \in K$, Endpunkte: e_3, e_1)

BS: $\{k_3,k_4,k_1\}$ ist ein Kreis.

L: (TA: $\{k_3,k_4,k_1\}$ ist Kreis) Welche Wegfolge kennt man ?

UB: $(e_1,k_3,e_2,k_4,e_3,k_1,e_1)$.

L: (TA: $(e_1,k_3,e_2,k_4,e_3,k_1,e_1)$) Die Frage ist, ob man mit dem Verfahren irgendwann fertig wird.

BO: Es gibt nur endlich viele Ecken, also kann man nicht immer neue Ecken finden.

L: Also gibt es ein $k_n \in Z$ mit Endpunkten e_n und e_{n+1}, so daß e_{n+1} schon einemal aufgetreten ist.
(TA: ... $k_n \in Z$, Endpunkte: e_n, e_{n+1}, $e_{n+1} \in \{e_1,e_2,\dots,e_{n-1}\}$)
Wer beschreibt bitte das Verfahren ?

PS: Z ist ein Zyklus, also führt von jeder Ecke eine gerade Anzahl von Kanten weg. Man nimmt eine Kante und von ihren Endpunkten führt noch eine Kante weg. So macht man das weiter, bis man eine Kante findet, deren zweiter Endpunkt schon aufgetreten war. Das geht, weil es nicht immer neue Ecken gibt. Dann hat man einen Kreis.

L: Man muß noch angeben, welchen Kreis das liefert. Wir nehmen an, $e_{n+1} = e_i$. Als Kreis hat man dann $\{k_i,k_{i+1},\dots,k_n\}$.
Das liefert die Folge $(e_i,k_i,e_{i+1},k_{i+1},\dots,e_n,k_n,e_i)$.
(TA: $e_{n+1} = e_i \Rightarrow \{k_i,k_{i+1},\dots,k_n\}$ Kreis,
$(e_i,k_i,e_{i+1},k_{i+1},\dots,e_n,k_n,e_i)$) Warum ist das eine Wegfolge ?

BS: Jede Kante aus dem Kreis tritt in der Folge genau einmal auf.

AP: Die Ecken sind paarweise verschieden, bis auf die erste und die letzte.

SR: Die neben einer Kante stehenden Ecken sind ihre Endpunkte.

HT: Warum ist e_{n+1} aus $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ und nicht aus $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$?

CS: Weil e_{n+1} nicht gleich e_n sein kann.

Tafelbild (Ausschnitt):

$k_6 \in K$, Endpunkte: e_4, e_1 $k_3 \in K$, " : e_1, e_2 $k_4 \in K$, " : e_2, e_3 $k_1 \in K$, " : e_3, e_1 $\{k_3, k_4, k_1\}$ ist Kreis $(e_1, k_3, e_2, k_4, e_3, k_1, e_1)$	Satz 4: $Z \subset K, Z \neq \emptyset$, Zyklus $\Rightarrow$ es gibt $R \subset Z$, R Kreis Beweis: $k_1 \in Z$, Endpunkte: e_1, e_2 $k_2 \in Z$, " : e_2, e_3; $e_3 = e_1 \Rightarrow$ Kreis $k_3 \in Z$, " : e_3, e_4; $e_4 = e_1$ oder $e_4 = e_2 \Rightarrow$ Kreis $k_4 \in Z$, " : e_4, e_5 ... $k_n \in Z$, " : e_n, e_{n+1} $e_{n+1} \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ $e_{n+1} = e_i \Rightarrow \{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n\}$ Kreis $(e_i, k_i, e_{i+1}, k_{i+1}, \ldots, e_n, k_n, e_i)$

Zum Schluß nannten DS und SR die Beweisideen der Sätze 2 bzw. 3. SL faßte zusammen, wie bewiesen wurde, daß die Menge der Zyklen in einem Graphen ein Unterraum von $\mathcal{P}$(K) ist und UB nannte die Beweisidee von Satz 4.

Als Hausaufgabe wurde die Aufgabe a) des Arbeitsbogens 3 gestellt.

Die Schüler erhielten die Seiten 11 und 12 des Textbuchs und den Arbeitsbogen 3.

5.4.3. Bemerkungen

Das Lernziel LZ 14 (3.Doppelstunde) wurde erreicht. Die Lernziele LZ 15 bis LZ 19 wurden erreicht. Dies wurde durch Schülerbeiträge und bei den Lernzielen LZ 15 und LZ 18 durch Beobachtung der Partnerarbeit überprüft. Das Lernziel LZ 20 soll durch die Hausaufgabe erreicht werden. Zur Behandlung von Satz 5 fehlte die Zeit, daher wurden die Lernziele LZ 21 und LZ 22 nicht erreicht.

5.5. Fünfte Doppelstunde

5.5.1. Planung

Lernziele: LZ 21, LZ 22, LZ 23, LZ 24, LZ 25, LZ 26, LZ 27

Nach einer Wiederholung der Sätze 2, 3 und 4 und ihrer Beweisideen soll die Hausaufgabe von einem Schüler vorgetragen werden. Vom Lehrer soll das Vorgehen auf Folie 7, Feld 2 notiert werden.

Das Konstruktionsverfahren des Beweises von Satz 5 soll im Lehrervortrag am Graphen von Beispiel 2 durchgeführt werden. Als Veranschaulichung dient Folie 5. Nach der Behandlung von zwei im Beweis wichtigen Eigenschaften der symmetrischen Differenz ($A \subset B \Rightarrow A \triangle B = B \setminus A$, $A \triangle B_1 \triangle B_2 \triangle \ldots \triangle B_n = \emptyset \Rightarrow A = B_1 \triangle B_2 \triangle \ldots \triangle B_n$) im Unterrichtsgespräch sollen sich die Schüler in Gruppenarbeit den Beweis anhand des Textbuchs (S.12) erarbeiten und die Aufgabe b) des Arbeitsbogens 3 lösen. Zur Auswertung soll von einem Schüler die Lösung der Aufgabe vorgetragen und vom Lehrer auf der Folie 7, Feld 3 notiert werden. Der Beweis soll unter dem Gesichtspunkt der Wirksamkeit des Algorithmus zusammengefaßt werden.

Anschließend soll Satz 6, der zum Beweis der Umkehrung von Satz 1 benötigt wird, besprochen werden. Die Schüler erhalten die Seite 13 des Textbuchs und sollen sich die erste Beweisrichtung in Partnerarbeit erarbeiten. Das Konstruktionsverfahren der zweiten Beweisrichtung soll im Unterrichtsgespräch am Graphen von Beispiel 2 durchgeführt werden. Zur Veranschaulichung dient Folie 5. Ausgehend von den Kreisen $\{k_2,k_3\}$, $\{k_4,k_5\}$ und $\{k_1,k_6,k_7\}$ mit den Wegfolgen (e_1,k_2,e_2,k_3,e_1), (e_2,k_4,e_3,k_5,e_2) bzw. $(e_3,k_7,e_4,k_6,e_1,k_1,e_3)$ soll eine Folge konstruiert werden, die zeigt, daß G ein Euler-Graph ist. Als erstes wird $\{k_2,k_3\}$ gewählt. Die Ecke e_1 tritt in den Wegfolgen der Kreise $\{k_2,k_3\}$ und $\{k_1,k_6,k_7\}$ auf. Für $\{k_2,k_3\} \cup \{k_1,k_6,k_7\}$ erhält man die Folge $(e_1,k_2,e_2,k_3,e_1,k_1,e_3,k_7,e_4,k_6,e_1)$. Die Ecke e_3 tritt in dieser Folge und in der Wegfolge von $\{k_4,k_5\}$ auf. Für $\{k_2,k_3\} \cup \{k_1,k_6,k_7\} \cup \{k_4,k_5\}$ erhält man die Folge $(e_1,k_2,e_2,k_3,e_1,k_1,e_3,k_5,e_2,k_4,e_3,k_7,e_4,k_6,e_1)$, die zeigt, daß G ein Euler-Graph ist. Die Schüler sollen sich in Gruppenarbeit anhand der Seite 13 des Textbuchs den Beweis erarbeiten und den Algorithmus im Graphen vom Arbeitsbogen 3 anwenden. Dabei sollen die Kreise zugrunde gelegt werden, die nach der vorhergehenden Gruppenarbeit vorgetragen wurden. Zur Auswertung soll die Lösung einer Gruppe vom Lehrer auf der Folie 7, Feld 4 notiert werden und der Beweis von einem Schüler zusammengefaßt werden.

Die Schüler erhalten die Seite 14 des Textbuchs und sollen den Beweis von Satz 7 lesen. Der Beweis soll von einem Schüler erläutert werden. In einer Zusammenfassung soll ein Schüler die behandelten Sätze und ihre Verwendung beim Beweis von Satz 7 darstellen.

Im Unterrichtsgespräch soll dann für Problem 1 unter Verwendung von Satz 7 eine Lösung erarbeitet werden. Von den Schülern wird erwartet, daß sie den Graphen von Problem 1 zu einem Euler-Graphen vervollständigen und daraus Schlüsse für die Aufgabenstellung ziehen.

Als Hausaufgabe soll die Erarbeitung der Seite 15 des Textbuchs gestellt werden.

Falls ausreichend Zeit zur Verfügung steht, kann dies ganz oder teilweise (nur Definition 7) in Partnerarbeit geschehen.

Die Schüler erhalten die Seite 15 des Textbuchs.

Tafelbild:

Eigenschaften der symmetrischen Differenz	Beispiel zu Satz 5 Beispiel zu Satz 6	Beispiel zu Satz 6

Tageslichtprojektor:

Folie 7

Folie 5

Folie 1

5.5.2. Durchführung

Der Unterricht fand im Physik-Übungsraum statt.

Es fehlten: DK, DS und HT.

Nach der Wiederholung trug SR die Hausaufgabe vor.

L: Den Beweis von Satz 5 liefert ein Algorithmus, den ich Ihnen an einem Beispiel demonstrieren will. Danach lesen Sie bitte den Beweis und wenden den Algorithmus auf ein anderes Beispiel an. Wird der Algorithmus auf einen Zyklus angewendet, so konstruiert er eine Menge disjunkter Kreise, deren symmetrische Differenz der Zyklus ist. In diesem Graphen (Folie 5) gibt es nach Satz 4 einen Kreis, da die Kantenmenge ein Zyklus ist. (TA: $Z = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$)
$R_1 = \{k_2, k_3\}$ ist solch ein Kreis. (TA: $R_1 = \{k_2, k_3\} \subset Z$)
R_1 ist auch ein Zyklus und ebenso $Z \triangle R_1$. $Z \triangle R_1$ ist gleich $\{k_1, k_4, k_5, k_6, k_7\}$ und es gibt nach Satz 4 einen Kreis, der Teilmenge von $Z \triangle R_1$ ist. (TA: $Z \triangle R_1 = \{k_1, k_4, k_5, k_6, k_7\}$)
$R_2 = \{k_4, k_5\}$ ist solch ein Kreis. (TA: $R_2 = \{k_4, k_5\} \subset Z \triangle R_1$)
Auch R_2 ist ein Zyklus und somit auch $(Z \triangle R_1) \triangle R_2$. $(Z \triangle R_1) \triangle R_2$ ist gleich $\{k_1, k_6, k_7\}$ und nach Satz 4 gibt es einen Kreis, der Teilmenge von $(Z \triangle R_1) \triangle R_2$ ist. (TA: $(Z \triangle R_1) \triangle R_2 = \{k_1, k_6, k_7\}$)
$R_3 = \{k_1, k_6, k_7\}$ erfüllt diese Bedingung. (TA: $R_3 = \{k_1, k_6, k_7\} \subset (Z \triangle R_1) \triangle R_2$) $((Z \triangle R_1) \triangle R_2) \triangle R_3$ ist die leere Menge.
(TA: $((Z \triangle R_1) \triangle R_2) \triangle R_3 = \emptyset$) Wendet man das Assoziativgesetz an, erhält man $Z \triangle ((R_1 \triangle R_2) \triangle R_3) = \emptyset$. (TA: $\Rightarrow Z \triangle ((R_1 \triangle R_2) \triangle R_3) = \emptyset$)

CS: Daraus folgt, daß $Z = (R_1 \triangle R_2) \triangle R_3$ ist.

L: (TA: $\Rightarrow Z = (R_1 \triangle R_2) \triangle R_3$)
Diesen Algorithmus kann man für jeden Zyklus, der nicht leer ist, und jeden Graphen durchführen. Zwei Eigenschaften der symmetrischen Differenz spielen in diesem Algorithmus eine wichtige Rolle. Wenn $A \subset B$ ist, was erhält man dann als symmetrische Differenz der beiden Mengen?

BO: $A \triangle B$ ist gleich $B \setminus A$, da $A \cup B$ gleich B und $A \cap B$ gleich A ist.

L: (TA: $A \subset B \Rightarrow A \triangle B = B \setminus A$)
Wenn $A \triangle (B_1 \triangle (B_2 \triangle \ldots \triangle B_n)) = \emptyset$ ist, so ist $A = B_1 \triangle (B_2 \triangle \ldots \triangle B_n)$, wie CS eben gesagt hat. Warum gilt das?
(TA: $A \triangle (B_1 \triangle (B_2 \triangle \ldots \triangle B_n)) = \emptyset \Rightarrow A = B_1 \triangle (B_2 \triangle \ldots \triangle B_n)$)

GT: $\emptyset$ ist das neutrale Element und jede Menge ist zu sich selbst invers. Also ist $A = B_1 \triangle (B_2 \triangle \ldots \triangle B_n)$, weil es nur ein inverses Element zu A gibt.

L: Lesen Sie sich bitte den Beweis durch und lösen Sie in Gruppen die Aufgabe b) auf dem Arbeitsbogen.

Die Schüler arbeiteten in folgenden Gruppen:

1) BO, BW, MK, SE und UB,
2) AP, CS, GH und GM,
3) BS, IH und UP,
4) GT, PS, RH, SL und SR.

L: Trägt bitte jemand von Ihnen (angesprochen waren die Schüler der Gruppe 1) die Lösung der Aufgabe b) vor.

SE: Als ersten Kreis haben wir $R_1 = \{k_5, k_6\}$ genommen. $Z \triangle R_1$ ist gleich $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_7, k_8, k_9, k_{10}\}$ und enthält einen Kreis. Da haben wir $R_2 = \{k_1, k_2, k_7, k_8\}$ gewählt. $Z \triangle R_1 \triangle R_2$ ist gleich $\{k_3, k_4, k_9, k_{10}\}$ und es gibt wieder einen Kreis. Als R_3 haben wir $\{k_3, k_4\}$ genommen. $Z \triangle R_1 \triangle R_2 \triangle R_3$ ist gleich $\{k_9, k_{10}\}$ und das ist selbst ein Kreis; $R_4 = \{k_9, k_{10}\}$. Dann ist $Z \triangle R_1 \triangle R_2 \triangle R_3 \triangle R_4 = \emptyset$. Dann weiß man, daß $Z = R_1 \triangle R_2 \triangle R_3 \triangle R_4$ ist.

L: (notiert die Schritte auf Folie 7, Feld 3)
Wer kann den Beweis von Satz 5 zusammenfassen? Warum funktioniert das Verfahren?

RH: Man wendet das Verfahren an und kann es immer fortsetzen, weil jedesmal ein Zyklus übrigbleibt und man einen neuen Kreis findet. Irgendwann gibt es keine Kanten mehr, da K endlich ist. Dann ist $Z = R_1 \triangle R_2 \triangle \ldots \triangle R_n$.

UP: Die Kreise sind disjunkt, weil man die Kanten, die schon in einem Kreis sind, herausgenommen hat.

Tafelbild (Ausschnitt):

$A \subset B$ $\Rightarrow A \triangle B = B \setminus A$ $A \triangle (B_1 \triangle (B_2 \triangle \ldots \triangle B_n)) = \emptyset$ $\Rightarrow A = B_1 \triangle (B_2 \triangle \ldots \triangle B_n)$	$Z = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$ $R_1 = \{k_2, k_3\} \subset Z$ $Z \triangle R_1 = \{k_1, k_4, k_5, k_6, k_7\}$ $R_2 = \{k_4, k_5\} \subset Z \triangle R_1$ $(Z \triangle R_1) \triangle R_2 = \{k_1, k_6, k_7\}$ $R_3 = \{k_1, k_6, k_7\} \subset (Z \triangle R_1) \triangle R_2$ $((Z \triangle R_1) \triangle R_2) \triangle R_3 = \emptyset$ $\Rightarrow Z \triangle ((R_1 \triangle R_2) \triangle R_3) = \emptyset$ $\Rightarrow Z = (R_1 \triangle R_2) \triangle R_3$

Der Beweis von Satz 6 erfolgte wie geplant. Bei der Durchführung des Algorithmus am Beispiel wurden die Folgen, die sich bei der Vereinigung von Kreisen ergaben, von Schülern genannt. BW hatte die Idee, für die Vereinigung von zwei Kreisen durch die Kombination der Wegfolgen der beiden Kreise eine Folge zu konstruieren. Die Zusammensetzung der Gruppen war wie oben. Zur Auswertung trug MK die Aufgabe vor und BS und AP erläuterten das Verfahren.

Den Beweis von Satz 7 faßte RH zusammen, wobei sie bemerkte, daß als zusätzliche Voraussetzung $K \neq \emptyset$ angenommen werden muß. GM nannte die bewiesenen Sätze und sagte, an welcher Stelle sie in den Beweis von Satz 7 eingehen.

Bei der Besprechung von Problem 1 schlug PS vor, den Graphen durch das Hinzufügen einer Kante zu einem Euler-Graphen zu machen und IH, GM und SL entwickelten die daraus resultierende Lösung des Problems.

Als Hausaufgabe wurde die Erarbeitung der Seite 15 des Textbuchs gestellt.
Die Schüler erhielten die Seite 15 des Textbuchs.

5.5.3. Bemerkungen

Die Erarbeitung der Seite 15 des Textbuchs im Unterricht war nicht möglich.

Das Lernziel LZ 20 (4.Doppelstunde) wurde erreicht. Die Lernziele LZ 21 bis LZ 25 wurden erreicht. Dies wurde durch Schülerbeiträge und bei den Lernzielen LZ 22 und LZ 24 durch Beobachtung der Gruppenarbeit überprüft. Die Lernziele LZ 26 und LZ 27 sollen durch die Hausaufgabe erreicht werden.

5.6. Sechste Doppelstunde

5.6.1. Planung und Durchführung

Lernziele: LZ 28, LZ 29, LZ 30

Nach einer kurzen Zusammenfassung des behandelten Stoffs durch Schüler und der Besprechung der Seite 15 des Textbuchs im Unterrichtsgespräch soll als Lehrervortrag eine Erläuterung der Probleme 4 bis 8 mit Hilfe der Folien 8, 9 und 11 erfolgen. Bei Folie 8 handelt es sich um 21 einzelne Dominosteine, die während der Gruppenarbeit von den Schülern benutzt werden können. Folie 9 enthält die beiden Spielbretter von Problem 5 und auf einer darüber legbaren Folie die für einen Springer zugelassenen Züge. Auch diese Folie kann von den Schülern benutzt werden. Die Schüler erhalten die Seiten

16 und 17 des Textbuchs, sollen die Probleme lösen und ihre Lösungen in Stichworten aufschreiben. Dabei soll von den konstruierten Graphen vorausgesetzt werden, daß sie zusammenhängend sind. Der Nachweis des Zusammenhangs ist bei den Graphen von Problem 5 nicht trivial. Da die Konstruktion von Graphen zu Problemen nur für die Probleme 1 bis 3 durchgeführt und nicht weiter geübt wurde, könnten die Schüler hier Schwierigkeiten haben. Daher ist nicht damit zu rechnen, daß jede Gruppe alle Probleme bearbeitet. Jeder Gruppe soll ein Problem zur Bearbeitung zugewiesen werden, damit jedes Problem von mindestens einer Gruppe bearbeitet wird. Vermutlich wird es fünf Gruppen geben; bei der Zuweisung sollen die Wünsche der Gruppen berücksichtigt werden. Die weitere Bearbeitung soll den Gruppen überlassen bleiben.

Der Unterricht fand im Physik-Übungsraum statt. Es fehlte HT. Die Stunde verlief wie geplant. Die Gruppen hatten folgende Zusammensetzung:

1) BW, DK, DS und PS,
2) BO, MK, SE und UB,
3) GT, RH, SL und SR,
4) BS, IH und UP,
5) AP, CS, GH und GM.

Vom Lehrer wurden keine Hilfen gegeben.

5.6.2. Bemerkungen

Die Lernziele LZ 26 und LZ 27 (5.Doppelstunde) wurden erreicht.

Eine Übersicht über die Arbeitsergebnisse der Gruppen gibt Tabelle 3.

Gruppe 1 bearbeitete die Probleme in der Reihenfolge 4 - 6 - 8 - 5. In 4b wurde zusätzlich zur richtigen Lösung behauptet, der Graph sei nicht zusammenhängend. In der Lösung von Problem 6 wurde der Graph nur soweit vervollständigt, daß er eine Eulersche Linie enthielt. Dies beruhte auf einer anderen Interpretation des Wortes "Rundgang". Problem 5 wurde wegen mangelnder Zeit nur ansatzweise bearbeitet.

Gruppe 2 bearbeitete die Probleme in der Reihenfolge 8 - 5 - 4. Der Gruppe fiel es zu Anfang schwer, sich auf die Arbeit zu konzentrieren. In der Lösung von Problem 5b wurde behauptet, von den Feldern gingen vier oder acht mögliche Züge aus,

Problem / Gruppe	1	2	3	4	5
4 Graph erkannt	+	+	+		+
a) gelöst	+	-	+		+
b) gelöst	(+)				+
c) gelöst	+				+
5 Graph erkannt	(+)	+		+	+
a) gelöst		+		+	+
b) gelöst		-		+	+
6 Graph erkannt	+		+	+	+
gelöst	(+)		+	+	+
7 Graph erkannt			+	+	+
Tetraeder gelöst			+	-	+
Oktaeder gelöst			+	(+)	+
Würfel gelöst			+	-	+
8 Graph erkannt	+	+	+		+
a) gelöst	+	+	+		+
b) gelöst	+	+	+		+
Summe	8,5	6	11	6,5	16

Tabelle 3: Ergebnisse der Gruppenarbeit
+ : richtig, (+) : teilweise richtig, - : falsch, bei Nichtbearbeitung keine Angabe, für die Summe zählt + eins und (+) einhalb

woraufhin die Zugfolge für möglich erklärt wurde. In 4a wurde die Problemstellung so übertragen, daß der Graph ein Kreis sein mußte.

Gruppe 3 bearbeitete die Probleme in der Reihenfolge 6 - 8 - 7 - 4. Zur weiteren Bearbeitung von Problem 4 fehlte die Zeit.

Gruppe 4 bearbeitete die Probleme in der Reihenfolge 5 - 6 - 7. Die Problemstellung bei Problem 7 wurde so aufgefaßt, daß keine Kante mit Draht doppelt gebildet werden durfte; daher wurde für Tetraeder und Würfel erklärt, sie seien nicht nachzubilden. Für den Oktaeder wurde die falsche Behauptung aufgestellt, der Graph enthalte eine Eulersche Linie und sei ein Euler-Graph.

Gruppe 5 bearbeitete die Probleme in der Reihenfolge 7 - 6 - 8 - 4 - 5.

Die Ergebnisse der Gruppen 5 und 3 sind sehr erfreulich. Berücksichtigt man bei den Gruppen 1 und 4 die durch falsche Interpretation der Problemstellung (Problem 6 bzw. Problem 7) entstandenen Fehler nicht, so ergibt sich mit der Summe 9 auch für diese Gruppen ein positives Ergebnis. Lediglich die

Ergebnisse der Gruppe 2 sind nicht erfreulich. Dies dürfte jedoch hauptsächlich auf der Wirkung der nahen Ferien und der Anspannungen durch Kursarbeiten beruhen.

Das Lernziel LZ 28 wurde erreicht. Die Lernziele LZ 29 und LZ 30 wurden von den Schülern der Gruppen 5 und 3 uneingeschränkt und von den Schülern der Gruppen 1, 4 und 2 mit den erwähnten Einschränkungen erreicht.

5.7. Siebente Doppelstunde

5.7.1. Planung

Lernziele : LZ 28, LZ 29, LZ 30, LZ 31

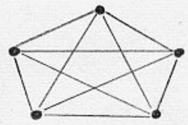
Die Lösungen der Probleme sollen von folgenden Gruppen vorgetragen werden : Problem 4 von Gruppe 1, Problem 5 von Gruppe 4, Problem 6 von Gruppe 3, Problem 7 von Gruppe 5 und Problem 8 von Gruppe 2. Somit soll jede Gruppe die Lösung eines Problems vortragen, das von ihr richtig gelöst wurde. Da am Abend vor der Doppelstunde ein Kurstreffen stattfindet, kann eine häusliche Vorbereitung nicht vorausgesetzt werden. Daher erhalten die Gruppen fünf Minuten Vorbereitungszeit. Sie erhalten dazu ihre Aufzeichnungen zurück. Gruppe 4 erhält die Folien 9 und 10. Die Auswahl der Schüler, die die Ergebnisse der Gruppen vortragen, ist jeder Gruppe freigestellt. Nach der Auswertung sollen im Unterrichtsgespräch die drei Schritte bei der Lösung der Probleme herausgearbeitet werden : Konstruktion eines Graphen, der dem Problem entspricht; Übertragung der Problemstellung auf den Graphen; Lösung des Problems mit Methoden der Graphentheorie. Dann sollen im Unterrichtsgespräch die Probleme beschrieben werden, die mit dem behandelten Stoff gelöst werden können.

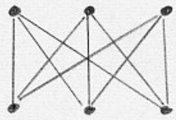
Die Schüler erhalten die Seiten 18, 19 und 20 des Textbuchs und die drei im Textbuch (S.20) aufgeführten Bücher zur Ansicht.

Im Lehrervortrag soll auf die Unterrichtsgegenstände einer denkbaren längeren Unterrichtsreihe eingegangen werden.

Auf Grund einer Anregung von GM soll dann im Unterrichtsgespräch die Speicherung von Graphen und die Durchführung von Algorithmen in Datenverarbeitungsanlagen behandelt werden. Dabei soll einer der behandelten Algorithmen als Beispiel dienen.

Im Anschluß sollen als Lehrervortrag zwei weitere Gebiete der Graphentheorie kurz vorgestellt werden. Ausgehend von den Graphen zu Problem 4 sollen die Begriffe vollständiger Graph und planarer Graph erklärt werden und die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ als nicht planare Graphen behandelt werden. Zu den Körpern aus Problem 7 sollen die zugehörigen planaren Graphen entwickelt werden und an ihnen der Begriff vollständig regulärer Graph erklärt werden.


K_5


$K_{3,3}$

Zum Abschluß sollen die Schüler aufgefordert werden, ihre Ansichten über den behandelten Stoff und die Art der Darstellung zu äußern.

5.7.2. Durchführung

Der Unterricht fand nicht im Physik-Übungsraum statt.
Es fehlten : DK, DS und UB.

Die Stunde verlief wie geplant.

Die Probleme wurden von folgenden Schülern vorgetragen : Problem 4 von BW, Problem 5 von UP, Problem 6 von GT, Problem 7 von AP und Problem 8 von BO. Zur Lösbarkeit von Problemen stellten die Schüler fest, daß mit dem behandelten Stoff Probleme gelöst werden können, die sich auf Graphen zurückführen lassen und bei denen es auf das Durchlaufen von Kanten ankommt. Die Lösung solcher Probleme läuft auf die Bestimmung der Anzahl der Kanten an den Ecken hinaus. Insbesondere ist es sinnvoll, solche Probleme so zu behandeln, bei denen wegen der Vielzahl von Möglichkeiten ein Ausprobieren nicht möglich ist.

Zum behandelten Stoff wurde u.a. folgendes geäußert :

RH: Interessant war, daß Probleme behandelt wurden, die sonst nicht im Mathematikunterricht vorkommen.

BS: Ich fand es sehr anschaulich. Mit diesen Problemen kann ich was anfangen - mehr als mit anderen Sachen, die wir gemacht haben.

IH: Ich hätte es besser gefunden, wenn wir praktischere Probleme behandelt hätten, z.B. Ampelschaltungen.

Die Diskussion über die Durchführung der Unterrichtsreihe bezog sich im wesentlichen auf die Rolle des Textbuchs.

PS: Ich fand die Durchführung gut. Das Textbuch war sinnvoll. Man brauchte nicht mitzuschreiben und konnte zu Hause nachlesen.

HT: Was wir in den Stunden erarbeitet haben, stand hinterher immer auf den Zetteln.

CS: Ich empfand das als Einengung. Für einige Zeit geht das, aber nicht auf Dauer.

5.7.3. Bemerkungen

Eine Diskussion über die Interpretation der Probleme 6 und 7 zeigte, daß die von den Gruppen 1 und 4 gemachten Fehler nicht auf mangelnde Stoffkenntnis zurückzuführen sind.

Die Lernziele LZ 28 bis LZ 31 wurden erreicht. Dies wurde durch Schülerbeiträge - insbesondere von Schülern der Gruppen 2, 4 und 1 - überprüft.

6. Rückblick

Es sollen hier einige der Probleme untersucht werden, die in den Vorüberlegungen eine Rolle gespielt haben. Dabei wird versucht, die Aussagen soweit wie möglich durch empirisches Material zu stützen, um verzerrte subjektive Einschätzungen auszuschalten. Das empirische Material wurde durch Auswertung von Tonbandaufzeichnungen gewonnen. Unbefriedigend ist, daß keinerlei Vergleichsdaten zur Verfügung stehen.

6.1. Unterrichtsverfahren

Die Anteile der Unterrichtsformen an der Unterrichtsreihe zeigt Tabelle 4.

Unterrichtsform	Doppelstunde 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Summe	relative Häufigkeit
Lehrervortrag	12	8	7	0	7	4	15	53	8,6%
Unterrichtsgespräch	42	31	38	78	28	6	33	256	41,8%
Partnerarbeit	21	0	0	11	9	0	0	41	6,7%
Gruppenarbeit	15	20	45	0	37	80	41	238	38,8%
Schülervortrag	0	25	0	0	0	0	0	25	4,1%
Summe	90	84	90	89	81	90	89	613	100,0%

Tabelle 4: Unterrichtsformen
Partnerarbeit und Gruppenarbeit einschließlich Auswertung, Unterrichtszeit: 2. und 5.Doppelstunde 85 Minuten, sonst 90 Minuten

Als sinnvoll erwies sich der relativ hohe Anteil an Gruppenarbeit. Hier waren alle Schüler aktiv am Unterrichtsgeschehen beteiligt. Zu hoch war der Anteil an Unterrichtsgespräch in der 4.Doppelstunde. Einige Schüler waren gegen Ende der Stunde unkonzentriert.

Die Durchführung der Beweise im Unterrichtsgespräch und in Kombinationen aus Lehrervortrag bzw. Unterrichtsgespräch und Gruppenarbeit war ohne größeren Zeitverlust möglich. Der Einsatz weiterer Kombinationen von Unterrichtsformen - insbesondere mit stärkerer Beteiligung der Schüler (z.B. Skizzierung der Beweisidee durch den Lehrer, Behandlung eines Beispiels und Formulierung des Beweises durch die Schüler in Gruppenarbeit) - hätte den Unterricht attraktiver gemacht, war aber angesichts der verfügbaren Unterrichtszeit zu risikoreich.

Wie häufig Schüler in einer Gruppe zusammengearbeitet haben, gibt Tabelle 5 an.

AP	BO	BS	BW	CS	DK	DS	GH	GM	GT	HT	IH	MK	PS	RH	SE	SL	SR	UB	UP	Name
/		1		4*		1	5*	3*	1					2						AP(5)
	/	1	1									5*			2			3*		BO(5)
		/				1	1			1*	3*	1		1				1	3*	BS(5)
			/		2*	2*		2				1	2*	1	4*			1		BW(5)
				/	1		4*	3*	1	1				1					1	CS(5)
					/	3*				2			2*	1	1*				1	DK(4)
						/	1			1			2*	2	1*					DS(4)
							/	3*	1					2						GH(5)
								/							2					GM(5)
									/				1	3*		3	3			GT(4)
										/	1*								2*	HT(3)
											/		1			1	1		4*	IH(4)
												/			2			3*		MK(5)
													/	2	1*	3	3		1	PS(5)
														/	1	2	2			RH(5)
															/			2		SE(5)
																/	5*		1	SL(5)
																	/		1	SR(5)
																		/		UB(3)
																			/	UP(5)

Tabelle 5: Zusammenarbeit in Gruppen
Angegeben ist die Anzahl der Gruppen, in denen zwei Schüler zusammengearbeitet haben, für die Anzahl 0 erfolgt keine Angabe, die Zahl neben dem Namen gibt die Anzahl der Doppelstunden (1. bis 6.Doppelstunde) an, in denen der Schüler an Gruppenarbeit teilgenommen hat, * bezeichnet die auf S.13 beschriebene Gruppenzusammensetzung

Die Zusammensetzung der Gruppen erfolgte ohne Beeinflussung durch den Lehrer. Die Gruppen bildeten sich immer auf Grund der Sitzordnung. Bei jeder Gruppenarbeit arbeiteten AP und GH, BO und MK, IH und UP sowie SL und SR zusammen. Wie aus Tabelle 5 hervorgeht, arbeiteten auch Schüler in einer Gruppe, die nicht zusammen einer der auf Seite 13 beschriebenen Gruppen angehören. Die Anzahl der Schüler aus anderen Gruppen, mit denen ein Schüler mindestens einmal zusammengearbeitet hat, reicht von 2 (GM) bis 11 (RH). Mit Schülern aus anderen Gruppen ist die Häufigkeit der Zusammenarbeit jedoch geringer als mit

Häufigkeit der Zusammenarbeit	0	1	2	3	4	5
Anzahl	116	36	18	13	4	3
davon in einer Gruppe	0	5	6	9	4	3

Tabelle 6: Zusammenarbeit in Gruppen
Angegeben ist die Anzahl der Paare von Schülern, die genau n-mal zusammengearbeitet haben (n=0,1,...,5) und davon die Anzahl der Paare, bei denen beide Schüler einer der auf S.13 beschriebenen Gruppen angehören

Schülern aus der eigenen Gruppe (Tabelle 6).

6.2. Mitarbeit der Schüler

Um einen Überblick über die Aktivität der Schüler außerhalb von Gruppenarbeit zu erhalten, wurde die Anzahl ihrer Beiträge im Unterricht ausgezählt [1]. Dabei konnte eine qualitätsmäßige Gewichtung nicht vorgenommen werden. Das Ergebnis enthält Tabelle 7. Das gewogene arithmetische Mittel aus den Indexwerten der Schüler ist 3,45 [2]. Aus den Indexwerten ergibt sich folgende Rangordnung:

BS	8,40	(5+)	IH	2,50	(3)
RH	7,11	(1-)	BW	2,25	(2-)
GM	6,00	(2+)	AP	1,80	(3+)
DS	5,50	(1)	DK	1,71	(2)
GT	5,14	(1-)	UB	1,67	(2-)
UP	4,50	(1)	SR	1,60	(4-)
CS	4,00	(1-)	SL	1,40	(4+)
HT	4,00	(2-)	GH	1,33	(3)
BO	3,80	(2)	MK	1,20	(4+)
PS	3,60	(4)	SE	0,75	(5+)

Neben den Namen sind die Indexwerte und in Klammern die Noten für sonstige Mitarbeit im 1.Kursabschnitt von 13.1 notiert. Bei der Interpretation der Indexwerte ist jedoch zu beachten,

1 Da "Beiträge zum Unterrichtsgespräch" eine Form sonstiger Mitarbeit ist (s. Runderlaß des Kultusministers vom 8.7.1976,[20],Ziff.2.2), muß auch die Häufigkeit von Beiträgen berücksichtigt werden.

2 Umfang einer Einzelstichprobe ist die Anzahl der Doppelstunden, an denen ein Schüler teilgenommen hat. (vgl. Clauß, Ebner,[6],S.71)

Name	Doppelstunde 1.	2.	3.	4.	5.	Summe	Index
AP	2	1	0	4	2	9	1,80
BO	6	1	4	6	2	19	3,80
BS	8	13	6	9	6	42	8,40
BW	1	1	5		2	9	2,25
CS	1	9	3	4	3	20	4,00
DK	1	0	3	2		6	1,71
DS	7	6	2	7		22	5,50
GH	3	1	1	1	0	6	1,33
GM	11	4	6	4	5	30	6,00
GT		7	7	2	2	18	5,14
HT	4	3	1	8		16	4,00
IH		2	2	4	2	10	2,50
MK	0	1	2	2	1	6	1,20
PS	4	1	6	5	2	18	3,60
RH	8	13	5	3	3	32	7,11
SE	0	1	1		1	3	0,75
SL	1	1	1	2	2	7	1,40
SR	2	1	0	4	1	8	1,60
UB			1	2	2	5	1,67
UP	2	10	3		3	18	4,50
Summe	61	76	59	69	39		

Tabelle 7: Beiträge im Unterricht
Angegeben ist die Anzahl der Beiträge im Unterricht, bei Fehlen erfolgt keine Angabe, *: nur erste Stunde anwesend, Index: Quotient von Summe und Anzahl der Doppelstunden, an denen der Schüler teilgenommen hat

daß kleine Differenzen der Indexwerte kaum signifikant sein dürften. Besonders auffällig sind die im Vergleich zu den Noten hohen Rangplätze von BS, GM und PS. Bei diesen drei Schülern war die Steigerung der Aktivität bemerkenswert, wobei die Beiträge von GM qualitativ eindeutig an der Spitze lagen. Im Vergleich zu den Noten niedrige Rangplätze haben DK, UB und GH. Bei UB dürfte dies wohl auf das Fehlen in den ersten beiden Doppelstunden zurückzuführen sein. Die Beteiligung von SR, SL, MK und SE war, obwohl sie am Ende der Rangfolge stehen, stärker als im voangegangenen Unterricht. Zusammen mit der Arbeit in Gruppen ist die Beteiligung der Schüler durchaus zufriedenstellend. Es wurde erreicht, daß alle Schüler dem Unterricht folgten und keine Verständnislücken auftraten.

Die Noten für sonstige Mitarbeit im 2.Kursabschnitt von 13.1, in die die Leistungen der Schüler während der Unterrichtsreihe eingegangen sind, enthält Tabelle 8. Zum Vergleich sind auch die Noten für sonstige Mitarbeit im 1.Kursabschnitt von 13.1 und die Gesamtnoten von 12.1, 12.2 und 13.1 angegeben.

Name	12.1	12.2	13.1	sonstige Mitarbeit 13.1 1. Kursabschnitt	sonstige Mitarbeit 13.1 2. Kursabschnitt
AP	4+	4+	3	3+	2-
BO	3	2-	2	2	2+
BS	4	4	4+	5+	3+
BW	3	2-	2-	2-	2
CS	2+	1-	1-	1-	1+
DK	2+	2-	1-	2	1-
DS	1-	2+	1	1	1+
GH	3-	3-	4+	3	4+
GM	2-	2-	2+	2+	1
GT	1-	2+	1-	1-	1
HT	2-	2-	2-	2-	2
IH	4+	3	3-	3	4+
MK	4-	3	2-	4+	3
PS	4+	4+	4+	4	3
RH	2+	2+	1-	1-	1
SE	4+	3-	3+	5+	4+
SL	3-	3	3+	4+	3-
SR	4-	4	4+	4-	4+
UB	2	2-	2-	2-	3+
UP	3+	2-	1-	1	1-

Tabelle 8: Mathematik-Noten

Eine Übersicht über die Häufigkeit der Noten gibt Tabelle 9. Zur besseren Übersichtlichkeit sind Notentendenzen nicht berücksichtigt.

Note	12.1	12.2	13.1	sonstige Mitarbeit 13.1 1. Kursabschnitt	sonstige Mitarbeit 13.1 2. Kursabschnitt
1	2	1	6	5	7
2	6	10	6	6	4
3	5	5	4	3	5
4	7	4	4	4	4
5	-	-	-	2	-
6	-	-	-	-	-

Tabelle 9: Häufigkeit der Noten

Das arithmetische Mittel der in Punkte umgewandelten Noten ist: 8,45 (entspricht der Note 3) für 12.1, 8,95 (entspricht 3+)

für 12.2, 9,95 (entspricht 2-) für 13.1, 9,15 (entspricht 3+) für die sonstige Mitarbeit im 1.Kursabschnitt von 13.1 und 10,35 (entspricht 2-) für die sonstige Mitarbeit im 2.Kursabschnitt von 13.1 [1]. Das arithmetische Mittel der Noten für sonstige Mitarbeit hat sich vom ersten zum zweiten Kursabschnitt von 13.1 um eine Notenstufe nach oben verändert. Veränderungen um drei oder mehr Notenstufen ergeben sich bei BS (von 5+ auf 3+), PS (von 4 auf 3) und SE (von 5+ auf 4+). Die Verbesserungen von BS und PS sind durch eine verstärkte Mitarbeit während und auch nach der Unterrichtsreihe zu erklären.

6.3. Textbuch

Das Textbuch konnte die angestrebten Funktionen erfüllen. Die Schüler schrieben erheblich weniger mit und konzentrierten sich stärker auf den Unterricht. Die Ausführlichkeit ermöglichte es den Schülern, versäumten Stoff nachzuholen (insbesondere nach der 4.Doppelstunde). Auch als Arbeitsmaterial im Unterricht erwies sich das Textbuch als brauchbar.

Durch die Ausgabe des Textbuchs nach jeder Doppelstunde wurde den Schülern deutlich, daß der Unterricht und die Unterrichtsergebnisse geplant waren. Dies geht aus den Äußerungen von CS und HT sowie ähnlichen Beiträgen anderer Schüler in der 7.Doppelstunde hervor. Obwohl den Schülern die Tatsache, daß Unterricht geplant wird, bekannt sein müßte (durch Angabe der Lernziele einer Unterrichtsreihe oder einer Unterrichtsstunde), wurde ihnen dies wohl erst durch das Textbuch bewußt. Es stellt sich die Frage, wie Schüler darauf reagieren oder wie sich ihr Verhalten im Unterricht ändert.

---

[1] Der Median weicht für 12.2 (2- statt 3+), die sonstige Mitarbeit im 1.Kursabschnitt von 13.1 (2- statt 3+) und die sonstige Mitarbeit im 2.Kursabschnitt von 13.1 (zwischen 2 und 2- statt 2-) vom arithmetischen Mittel ab. (vgl. S.11, Anmerkung 1)

6.4. Zusammenfassende Wertung

Die im 3.1. diskutierten Eigenschaften der Graphentheorie (Anwendungsfreudigkeit, Anschaulichkeit, Problemfreudigkeit) sind auch von den Schülern erkannt worden, wie die Äußerungen von RH, BS und IH in der 7.Doppelstunde zeigen. Dabei bemängelte IH, daß nicht praktischere Probleme behandelt wurden. Dies ist angesichts der behandelten Probleme berechtigt, doch ließ die Beschränkung des Stoffs nicht mehr zu.

Die Durchführung der Unterrichtsreihe hat gezeigt, daß die ausgewählten Unterrichtsgegenstände in diesem Kurs behandelt werden konnten und sich sinnvoll in die Kursthemen einfügen. Eine Erweiterung auf die in 1.2. beschriebenen Gegenstände ist möglich.

Die an die Unterrichtsreihe gestellten Erwartungen wurden erfüllt, die Lernziele von den Schülern erreicht.

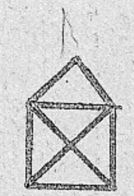
Anhang

1. Textbuch

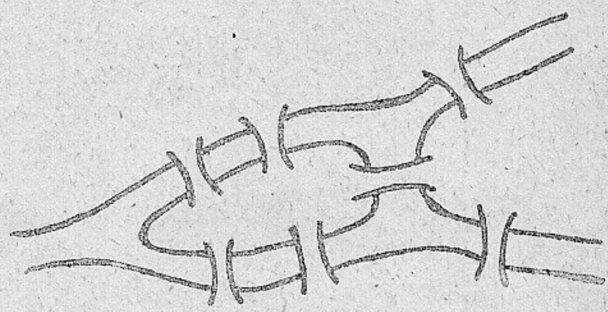
BEHANDLUNG EINES GRAPHENTHEORETISCHEN PROBLEMS MIT HILFSMITTELN AUS DER LINEAREN ALGEBRA

I Begriffe der Graphentheorie

<u>Problem 1</u> (Haus des Nikolaus)
Kann man die nebenstehende Figur in einem Zug zeichnen?



<u>Problem 2</u> (Königsberger Brückenproblem)
"Zu Königsberg in Preussen ist eine Insel..., genannt 'der Kneiphof', und der Fluss, der sie umfliesst, teilt sich in zwei Arme... Über die Arme dieses Flusses führen sieben Brücken...
Nun wurde gefragt, ob jemand seinen Spazierweg so einrichten könne, dass er jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überschreite. Es wurde mir gesagt, dass einige diese Möglichkeit verneinen, andere daran zweifeln, dass aber niemand sie erhärte."



(Leonhard Euler, 1736)

<u>Problem 3</u> (Erschwerte Überfahrt)

Ein Fährmann soll einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluß bringen. Das zur Verfügung stehende Boot faßt außer dem Fährmann nur einen weiteren "Passagier". Aus leicht ersichtlichen Gründen darf in Abwesenheit des Fährmanns weder der Wolf mit der Ziege noch die Ziege mit dem Kohlkopf zusammen sein.

Definition 1 2

Sei E eine endliche nichtleere Menge, K eine endliche Menge, $p: K \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ eine Abbildung, die jedem Element aus K eine zweielementige Teilmenge von E zuordnet. $G = (E, K, p)$ heißt Graph.

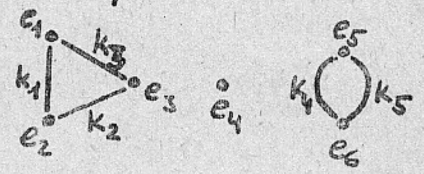
Die Elemente aus E heißen Ecken, die Elemente aus K Kanten. Für jede Kante $k \in K$ heißen die Elemente aus $p(k)$ Endpunkte von k.

Jede Kante eines Graphen hat also genau zwei verschiedene Endpunkte.

Beispiel 1

Sei $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ und $p(k_1) = \{e_1, e_2\}$, $p(k_2) = \{e_2, e_3\}$, $p(k_3) = \{e_1, e_3\}$, $p(k_4) = \{e_5, e_6\}$ und $p(k_5) = \{e_5, e_6\}$, wobei $p: K \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ eine Abbildung ist.
$G = (E, K, p)$ ist nach Definition 1 ein Graph.

Der Graph G kann ("graphisch") dargestellt werden:

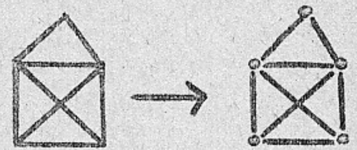


Im folgenden wird nicht mehr zwischen einem Graphen und seiner Darstellung unterschieden, die auch als Graph bezeichnet wird.

Wie kann den Problemen 1, 2 und 3 ein Graph zugeordnet werden?

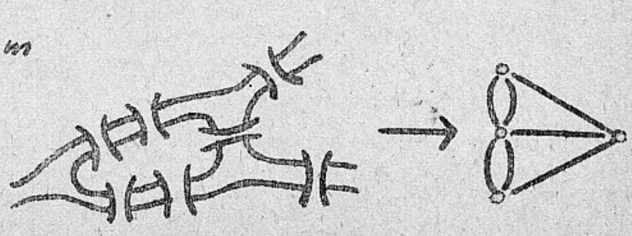
Problem 1

Wenn man jeden am Rand der Figur gelegenen Schnittpunkt von zwei Strecken als Ecke und jede Strecke zwischen zwei solchen Schnittpunkten als Kante mit entsprechenden Endpunkten auffaßt, erhält man nebenstehende Zuordnung.



Problem 2

Wenn man jedes Gebiet, von dem Brücken abgehen, als Ecke und jede zwei Gebiete verbindende Brücke als Kante mit entsprechenden Endpunkten auffaßt, erhält man nebenstehende Zuordnung.



③

Problem 3

Mit F sei die Anwesenheit des Fährmanns, mit W die Anwesenheit des Wolfs, mit Z die Anwesenheit der Ziege und mit K die Anwesenheit des Kohlkopfs bezeichnet.

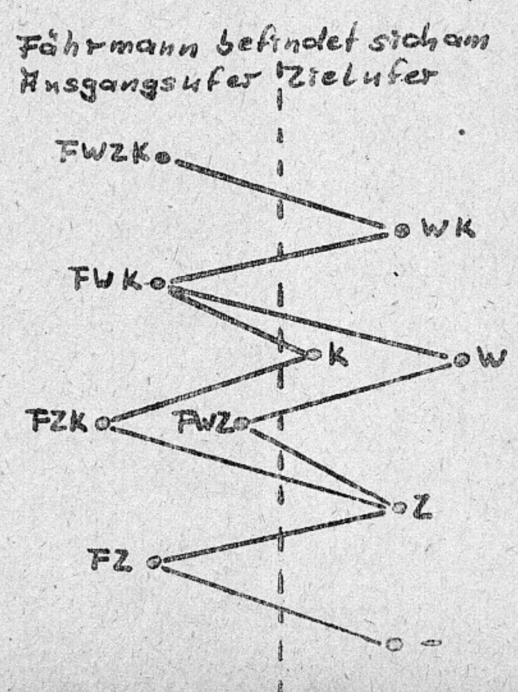
Dann sind folgende Situationen möglich:

Ausgangsufer		Zielufer	Ausgangsufer		Zielufer
FWZK		—	WZ	*	FK
FWZ		K	WK		FZ
FWK		Z	ZK	*	FW
FZK		W	F	*	WZK
WZK	*	F	W		FZK
FW	*	ZK	Z		FWK
FZ		WK	K		FWZ
FK	*	WZ	—		FWZK

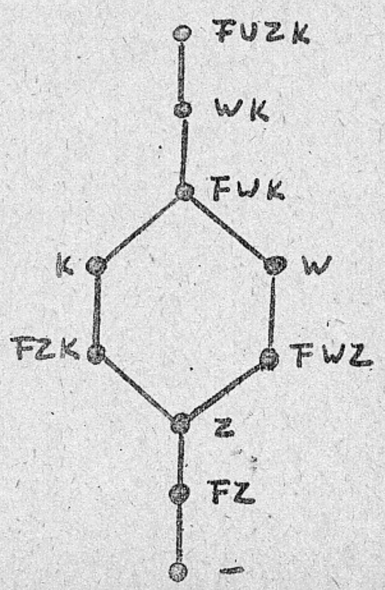
Die mit * bezeichneten Situationen dürfen nach den Bedingungen nicht eintreten.
Zur Beschreibung einer Situation genügt es, die auf dem Ausgangsufer befindlichen Passagiere anzugeben.

Da nur der Fährmann die Fähre bedienen kann, kann nach einer Situation, in der sich der Fährmann am Ausgangsufer befindet, nur eine Situation folgen, in der sich der Fährmann am Zielufer befindet; und umgekehrt.

Die Situationen als Ecken und jeder mögliche Übergang von einer Situation zu einer anderen als Kante eines Graphen aufgefaßt, ergibt folgendes:



oder:



Während man die Lösung des Problems 3 durch das Angeben eines das Problem beschreibenden Graphen sofort sieht, gilt dies für die Probleme 1 und 2 nicht. Es muß sogar erst noch die Aufgabenstellung auf die Graphen übertragen werden. Für Problem 2 geschieht dies folgendermaßen (Problem 1 wird später behandelt): 4

Definition 2

Ein Graph $G=(E,K,p)$ heißt Euler-Graph, wenn es eine endliche Folge $(e_1, k_1, e_2, k_2, \ldots, e_n, k_n, e_{n+1})$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

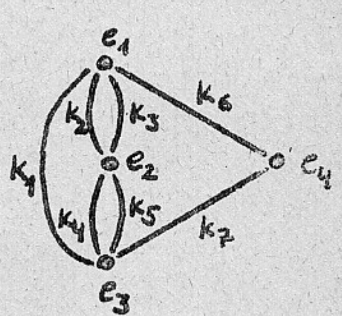
(i) $K=\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ und jede Kante aus K tritt in der Folge genau einmal auf,

(ii) $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1} \in E$, $e_1=e_{n+1}$ und jede Ecke aus E tritt in der Folge mindestens einmal auf,

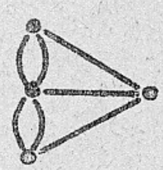
(iii) die Ecken e_i und e_{i+1} sind die beiden Endpunkte der Kante k_i (für $i=1,2,\ldots,n$).

Beispiel 2

Der nebenstehende Graph ist ein Euler-Graph, wie sich aus der Folge $(e_1, k_6, e_4, k_7, e_3, k_4, e_2, k_3, e_1, k_1, e_3, k_5, e_2, k_2, e_1)$ ergibt. Es gibt jedoch noch andere Folgen, die zeigen, daß es sich um einen Euler-Graph handelt, z.B. $(e_1, k_2, e_2, k_3, e_1, k_1, e_3, k_4, e_2, k_5, e_3, k_7, e_4, k_6, e_1)$.



Problem 2 läßt sich daher auch so formulieren:
Ist der Graph



ein Euler-Graph?

Man versucht Euler-Graphen durch äquivalente Bedingungen (die leichter zu überprüfen sind) zu beschreiben, um von Graphen sagen zu können, ob sie Euler-Graphen sind.

Satz 1

Sei $G=(E,K,p)$ ein Euler-Graph.
Dann ist jede Ecke $e \in E$ Endpunkt einer geraden Anzahl von Kanten.

Beweis:

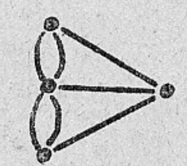
Es gibt eine endliche Folge $(e_1, k_1, e_2, k_2, \ldots, e_n, k_n, e_{n+1})$, die die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) der Definition 2 hat.
Nach (i) tritt jede Kante genau einmal in der Folge auf.
Für jedes Auftreten einer beliebigen Ecke unter den Ecken $e_1, e_2, \ldots, e_n$ der Folge gibt es nach (iii) genau zwei ~~Eck~~ Kanten, die diese Ecke als Endpunkt haben (man beachte $e_{n+1} = e_1$).

Also ist für jede Ecke die Anzahl der Kanten, die diese Ecke als Endpunkt haben, gleich der mit 2 multiplizierten Anzahl des Auftretens der Ecke unter den Ecken $e_1, e_2, \ldots, e_n$ der Folge.

Zu Satz 1 äquivalent ist folgende Aussage:

Ist in einem Graph $G=(E,K,p)$ mindestens eine Ecke $e \in E$ Endpunkt einer ungeraden Anzahl von Kanten, so ist G kein Euler-Graph.

Damit ist Problem 2 gelöst. Man erkennt, daß der Graph



kein Euler-Graph ist.

Leonhard Euler stellte sich jedoch auch folgendes allgemeinere Problem:

»Wie auch die Gestalt des Flusses und seine Verteilung in Arme, sowie die Anzahl der Brücken ist, zu finden, ob es möglich sei, jede Brücke genau einmal zu überschreiten oder nicht."

Es stellt sich die Frage, ob aus der Tatsache, daß in einem Graph $G=(E,K,p)$ jede Ecke $e \in E$ Endpunkt einer geraden Anzahl von Kanten ist, folgt, daß G ein Euler-Graph ist.

II. Wege, Kreise und Zyklen

Um die gestellte Frage nach der Umkehrbarkeit von Satz 1 beantworten zu können, untersucht man Begriffe, die einfacher sind als der Begriff Euler-Graph.

<u>Definition 3</u>

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph. Eine Menge von Kanten $W \subset K$ heißt <u>Weg</u>, wenn es eine endliche Folge $(e_1, k_1, e_2, k_2, \ldots, e_n, k_n, e_{n+1})$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $W = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ und jede Kante aus W tritt in der Folge genau einmal auf,

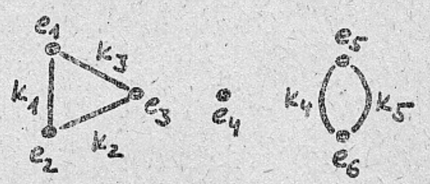
(ii) $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1} \in E$ und die Ecken, die in der Folge auftreten sind paarweise verschieden (mit der möglichen Ausnahme: $e_1 = e_{n+1}$),

(iii) die Ecken e_i und e_{i+1} sind die beiden Endpunkte der Kante k_i (für $i = 1, 2, \ldots, n$).

e_1 und e_{n+1} heißen <u>Endpunkte des Weges W</u>. Eine Folge mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) heißt <u>Wegfolge von W</u>.

<u>Beispiel 3</u>

Im Graphen aus Beispiel 1 ist $W = \{k_2, k_3\} \subset K$ ein Weg. Wegfolgen von W sind $(e_2, k_2, e_3, k_3, e_1)$ und $(e_1, k_3, e_3, k_2, e_2)$.

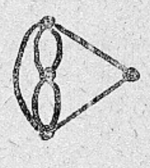


<u>Definition 4</u>

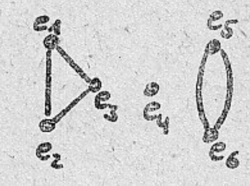
Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn es zu je zwei verschiedenen Ecken einen Weg gibt, dessen Endpunkte diese beiden Ecken sind.

<u>Beispiel 4</u>

Der Graph aus Beispiel 2 ist zusammenhängend.



Der Graph aus Beispiel 1 ist nicht zusammenhängend. (e_1 und e_4 sind nicht Endpunkte eines Weges.)



Jeder Euler-Graph ist zusammenhängend.

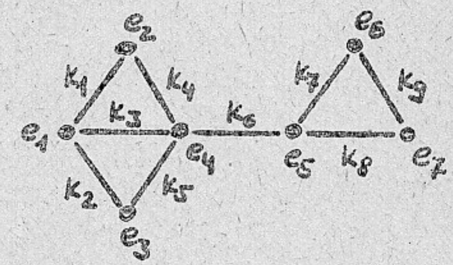
Es werden im Folgenden nur zusammenhängende Graphen betrachtet, die vereinfachend als Graphen bezeichnet werden.

Definition 5

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph. Eine Menge von Kanten $R \subset K$, die ein Weg ist, heißt Kreis, wenn es eine Wegfolge von R $(e_1, k_1, e_2, k_2, \ldots, e_n, k_n, e_{n+1})$ mit der Eigenschaft $e_1 = e_{n+1}$ gibt.

Beispiel 5

Im nebenstehenden Graphen ist z.B. die Menge $\{k_1, k_2, k_4, k_5\}$ ein Kreis.



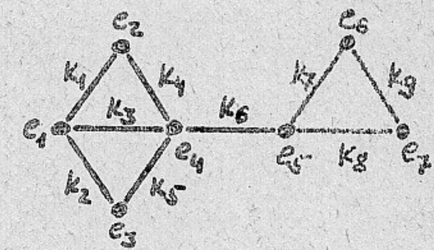
Definition 6

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph. Eine Menge von Kanten $Z \subset K$ heißt Zyklus, wenn jede Ecke $e \in E$ Endpunkt einer geraden Anzahl von Kanten aus Z ist.

Beispiel 6

In jedem Graphen ist $\emptyset \subset K$ ein Zyklus. (Da 0 eine gerade Zahl ist.)

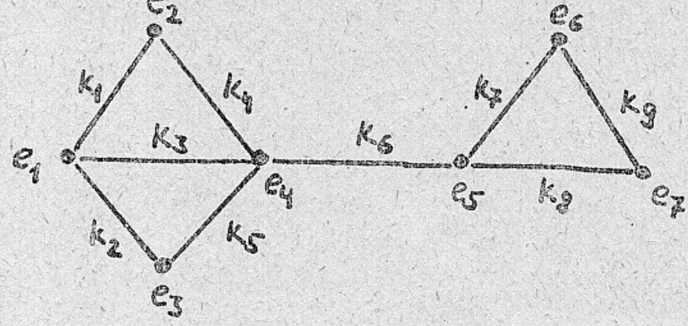
Im Graphen aus Beispiel 5 ist z.B. die Menge $\{k_1, k_3, k_4, k_7, k_8, k_9\}$ ein Zyklus.
Die Menge $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ ist kein Zyklus, da e_1 Endpunkt der Kanten k_1, k_2 und k_3, also einer ungeraden Anzahl von Kanten, ist.



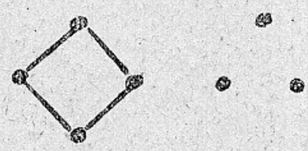
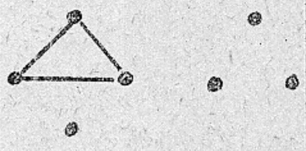
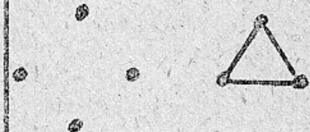
Satz 1 läßt sich nun auch so formulieren:
Sei $G=(E,K,p)$ ein Euler-Graph.
Dann ist K ein Zyklus.

Die am Ende von Abschnitt I gestellte Frage kann umformuliert werden:
Wenn in einem Graphen $G=(E,K,p)$ die Kantenmenge K ein Zyklus ist, ist dann G ein Euler-Graph?

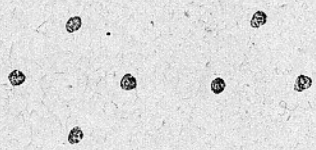
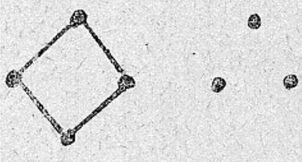
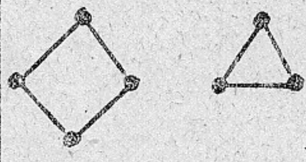
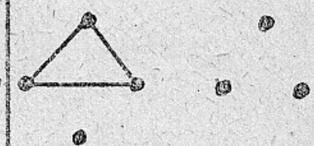
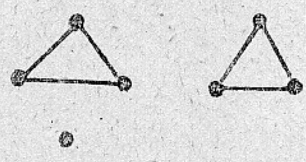
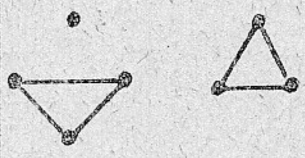
8

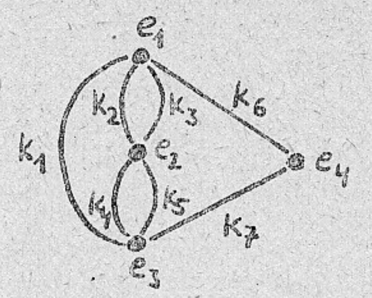


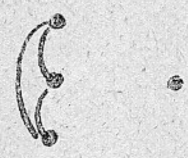
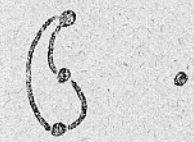
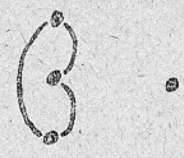
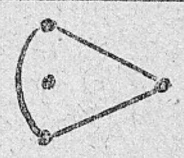
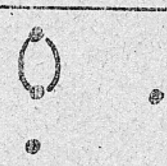
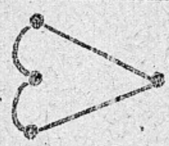
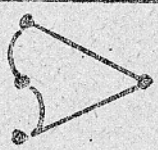
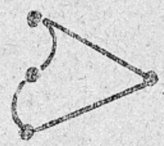
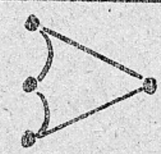
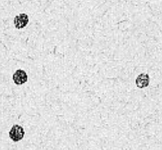
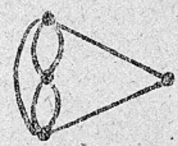
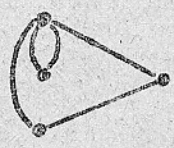
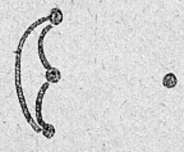
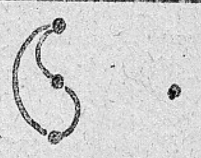
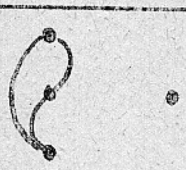
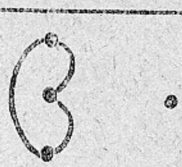
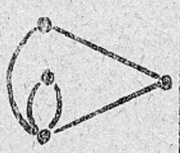
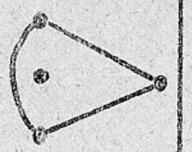
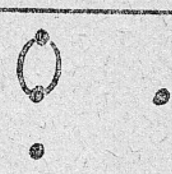
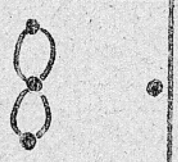
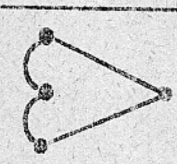
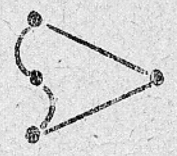
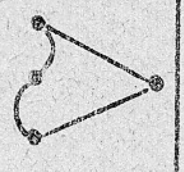
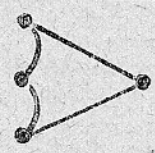
Kreise

			
$\{k_1, k_2, k_4, k_5\}$	$\{k_1, k_3, k_4\}$	$\{k_2, k_3, k_5\}$	$\{k_7, k_8, k_9\}$

Zyklen

			
$\emptyset$	$\{k_1, k_2, k_4, k_5\}$	$\{k_1, k_2, k_4, k_5, k_7, k_8, k_9\}$	$\{k_1, k_3, k_4\}$
			
$\{k_1, k_3, k_4, k_7, k_8, k_9\}$	$\{k_2, k_3, k_5\}$	$\{k_2, k_3, k_5, k_7, k_8, k_9\}$	$\{k_7, k_8, k_9\}$



Kreise	 $\{k_1, k_2, k_4\}$	 $\{k_1, k_2, k_5\}$	 $\{k_1, k_3, k_4\}$	 $\{k_1, k_3, k_5\}$	 $\{k_1, k_6, k_7\}$
 $\{k_2, k_3\}$	 $\{k_2, k_4, k_6, k_7\}$	 $\{k_2, k_5, k_6, k_7\}$	 $\{k_3, k_4, k_6, k_7\}$	 $\{k_3, k_5, k_6, k_7\}$	 $\{k_4, k_5\}$
Zyklen	 $\emptyset$	 $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$	 $\{k_1, k_2, k_3, k_6, k_7\}$	 $\{k_1, k_2, k_4\}$	 $\{k_1, k_2, k_5\}$
	 $\{k_1, k_3, k_4\}$	 $\{k_1, k_3, k_5\}$	 $\{k_1, k_4, k_5, k_6, k_7\}$	 $\{k_1, k_6, k_7\}$	 $\{k_2, k_3\}$
 $\{k_2, k_3, k_4, k_5\}$	 $\{k_2, k_4, k_6, k_7\}$	 $\{k_2, k_5, k_6, k_7\}$	 $\{k_3, k_4, k_6, k_7\}$	 $\{k_3, k_5, k_6, k_7\}$	 $\{k_4, k_5\}$

III Beziehungen zwischen Kreisen und Zyklen (10)

Sei M eine endliche Menge, $\mathcal{R}(M)$ die Potenzmenge von M (Menge aller Teilmengen von M). Für alle $A, B \in \mathcal{R}(M)$ (also $A, B \subset M$) sei $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. $\triangle$ heißt <u>symmetrische Differenz</u>.

$(\mathcal{R}(M), \triangle)$ ist eine kommutative Gruppe. Die leere Menge $\emptyset$ ist das neutrale Element (für alle $A \in \mathcal{R}(M)$ ist $\emptyset \triangle A = (\emptyset \cup A) \setminus (\emptyset \cap A) = A \setminus \emptyset = A$); jedes $A \in \mathcal{R}(M)$ ist zu sich selbst invers (für alle $A \in \mathcal{R}(M)$ ist $A \triangle A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$).

$(\{0,1\}, +, \cdot)$ ist ein Körper, wenn man definiert:
$0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=0$ und $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=1\cdot 0=0$, $1\cdot 1=1$.

$\odot$ sei eine äußere Verknüpfung auf $\mathcal{R}(M)$ mit Elementen aus $\{0,1\}$, definiert durch:
$0 \odot A = \emptyset$ und $1 \odot A = A$ für alle $A \in \mathcal{R}(M)$.

Dann ist $(\mathcal{R}(M), \triangle, \{0,1\}, \odot)$ ein $\{0,1\}$-Vektorraum, denn es gelten:

(i) $\bigwedge\limits_{\substack{A,B \in \mathcal{R}(M) \\ \alpha \in \{0,1\}}} \quad \alpha \odot (A \triangle B) = (\alpha \odot A) \triangle (\alpha \odot B)$,

(ii) $\bigwedge\limits_{\substack{A \in \mathcal{R}(M) \\ \alpha,\beta \in \{0,1\}}} \quad (\alpha \cdot \beta) \odot A = \alpha \odot (\beta \odot A)$,

(iii) $\bigwedge\limits_{\substack{A \in \mathcal{R}(M) \\ \alpha,\beta \in \{0,1\}}} \quad (\alpha + \beta) \odot A = (\alpha \odot A) \triangle (\beta \odot B)$,

(iv) $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{R}(M)} \quad 1 \odot A = A$.

Die Gültigkeit von (i) bis (iv) überprüft man durch Einsetzen für α und β.

Sei $G = (E, K, p)$ ein Graph. Da K eine endliche Menge ist, ist $(\mathcal{R}(K), \triangle, \{0,1\}, \odot)$ ein $\{0,1\}$-Vektorraum.
Sind $K', K'' \subset K$ Mengen von Kanten, so enthält die Menge $K' \triangle K''$ alle Kanten, die in <u>genau</u> einer der beiden Mengen enthalten sind.
Sind $K', K'' \subset K$ disjunkte Mengen von Kanten, so ist die symmetrische Differenz beider Mengen gleich der Vereinigung der beiden Mengen ($K' \cap K'' = \emptyset \Rightarrow K' \triangle K'' = (K' \cup K'') \setminus (K' \cap K'') = (K' \cup K'') \setminus \emptyset = K' \cup K''$).

Satz 2. (11)

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph, $R\subset K$ ein Kreis.
Dann ist R ein Zyklus.

Beweis:

Es gibt eine Wegfolge von R: $(e_1,k_1,e_2,k_2,\ldots,e_n,k_n,e_{n+1})$ mit $e_1=e_{n+1}$.

Da jede Kante zwei verschiedene Endpunkte hat, ist $n\geq 2$.

Jede in der Folge auftretende Ecke (einschließlich e_1) ist Endpunkt von genau zwei Kanten aus R, da jede Kante aus R in der Folge auftritt und die in der Folge auftretenden Ecken paarweise verschieden sind (mit der Ausnahme: $e_1=e_{n+1}$).

Jede in der Folge nicht auftretende Ecke ist Endpunkt keiner Kante aus R, da jede Kante aus R in der Folge auftritt, ebenso ihre beiden Endpunkte.

Satz 3

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph, $Z,Z'\subset K$ Zyklen.
Dann ist $Z\Delta Z'$ ein Zyklus.

Beweis:

Nach Definition von Δ ist für jedes $e\in E$ die Anzahl aller Kanten aus $Z\Delta Z'$, deren einer Endpunkt e ist, gleich der Summe der Anzahl der Kanten aus Z mit Endpunkt e und der Anzahl der Kanten aus Z' mit Endpunkt e, vermindert um die doppelte Anzahl der Kanten aus $Z\cap Z'$ mit Endpunkt e.
Da Z und Z' Zyklen sind, ist für jedes $e\in E$ die Anzahl der Kanten aus Z (bzw. Z') mit Endpunkt e eine gerade Zahl.
Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.
Da das Produkt einer beliebigen Zahl mit 2 eine gerade Zahl ist, ist die doppelte Anzahl der Kanten aus $Z\cap Z'$ mit Endpunkt e eine gerade Zahl.
Da die Differenz zweier gerader Zahlen eine gerade Zahl ist, gilt die Behauptung.

Satz 3 besagt, daß die Menge aller Zyklen in einem Graphen $G=(E,K,p)$ bezüglich der Verknüpfung Δ abgeschlossen in $\mathcal{R}(K)$ ist. Da $\emptyset\subset K$ ein Zyklus ist, ist die Menge aller Zyklen aufgrund der Definition von $\odot$ bezüglich dieser Verknüpfung abgeschlossen in $\mathcal{R}(K)$. Damit ist die Menge aller Zyklen in einem Graphen $G=(E,K,p)$ ein Unterraum von $(\mathcal{R}(K),\Delta,\{0,1\},\odot)$.

Aus Satz 2 und Satz 3 folgt, daß die symmetrische Differenz endlich vieler Kreise in einem Graphen ein Zyklus ist.

Satz 4 (12)

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph, $Z\subset K$, $Z\neq\emptyset$, ein Zyklus.
Dann gibt es einen Kreis $R\subset Z$.

Beweis:

Da $Z\neq\emptyset$ ist, gibt es eine Kante $k_1\in Z$ mit den Endpunkten $e_1, e_2\in E$. Dann existiert ein $k_2\in Z$ mit den Endpunkten $e_2, e_3\in E$, da Z ein Zyklus ist und die Ecke e_2 Endpunkt einer geraden Anzahl von Kanten aus Z ist. Ist $e_3\neq e_1$, existiert aus dem gleichen Grund eine Kante $k_3\in Z$ mit den Endpunkten $e_3, e_4\in E$. Ist $e_4\neq e_1$ und $e_4\neq e_2$, existiert eine Kante $k_4\in Z$ mit den Endpunkten $e_4, e_5\in E$ ...

Da E eine endliche Menge ist, gibt es eine Kante k_n mit den Endpunkten $e_n, e_{n+1}\in E$, so daß $e_{n+1}\in\{e_1,e_2,\dots,e_{n-1}\}$ ist. Ist $e_{n+1}=e_i$ ($i\in\{1,2,\dots,n-1\}$), so ist $\{k_i,k_{i+1},\dots,k_n\}$ ein Kreis mit der Wegfolge $(e_i,k_i,e_{i+1},k_{i+1},\dots,e_n,k_n,e_{n+1})$ und es ist $e_i=e_{n+1}$.

Satz 5

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph, $Z\subset K$, $Z\neq\emptyset$, ein Zyklus.
Dann ist Z symmetrische Differenz von disjunkten Kreisen.

Beweis:

Nach Satz 4 gibt es einen Kreis $R_1\subset Z$. Nach Satz 2 und Satz 3 ist $Z\triangle R_1$ ein Zyklus. Ist $Z\triangle R_1=\emptyset$, gilt die Behauptung, da dann $Z=R_1$ ist.
Ist $Z\triangle R_1\neq\emptyset$, so gibt es nach Satz 4 einen Kreis $R_2\subset Z\triangle R_1$. Es ist $R_2\cap R_1=\emptyset$. $(Z\triangle R_1)\triangle R_2$ ist ein Zyklus. Ist $(Z\triangle R_1)\triangle R_2=\emptyset$, gilt die Behauptung, da wegen $Z\triangle(R_1\triangle R_2)=\emptyset$ gilt: $Z=R_1\triangle R_2$.
Ist $(Z\triangle R_1)\triangle R_2\neq\emptyset$, so gibt es nach Satz 4 einen Kreis $R_3\subset(Z\triangle R_1)\triangle R_2$. Es ist $R_3\cap R_2=\emptyset$ und $R_3\cap R_1=\emptyset$. $((Z\triangle R_1)\triangle R_2)\triangle R_3$ ist ein Zyklus. Ist $((Z\triangle R_1)\triangle R_2)\triangle R_3=\emptyset$, gilt die Behauptung, da wegen $Z\triangle((R_1\triangle R_2)\triangle R_3)=\emptyset$ gilt: $Z=(R_1\triangle R_2)\triangle R_3$.
Ist $((Z\triangle R_1)\triangle R_2)\triangle R_3\neq\emptyset$ wird das Verfahren fortgesetzt.
Da K eine endliche Menge ist, also auch Z, gibt es eine Zahl n, so daß $(\dots((Z\triangle R_1)\triangle R_2)\triangle\dots)\triangle R_n=\emptyset$ ist. Dann ist auch $Z\triangle((\dots(R_1\triangle R_2)\triangle\dots)\triangle R_n)=\emptyset$ und $Z=(\dots(R_1\triangle R_2)\triangle\dots)\triangle R_n$. Die Kreise $R_1,R_2,\dots,R_n$ sind nach Konstruktion paarweise disjunkt.

Aus Satz 5 folgt, daß die Menge der Kreise in einem Graphen ein Erzeugendensystem für den Unterraum der Zyklen ist.

13

Satz 6

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph.
G ist ein Euler-Graph genau dann, wenn K Vereinigung von disjunkten Kreisen ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$"

Ist G ein Euler-Graph, so ist K nach Satz 1 ein Zyklus und nach Satz 5 symmetrische Differenz von disjunkten Kreisen, also nach Definition von Δ auch Vereinigung von disjunkten Kreisen.

„$\Leftarrow$"

Sei K Vereinigung von disjunkten Kreisen, etwa $K = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n$.

$K' \subset K$ sei die Menge aller Kanten aus einigen (aber nicht allen) dieser Kreise, etwa $K' = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_i$ $(i < n)$.
Wenn es eine Folge $(e_1, k_1, e_2, k_2, \ldots, e_n, k_n, e_{n+1})$ gibt, die folgende Eigenschaften hat:

(i) $K' = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ und jede Kante aus K' tritt in der Folge genau einmal auf,

(ii) $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1} \in E$ und $e_1 = e_{n+1}$,

(iii) die Ecken e_i und e_{i+1} sind die beiden Endpunkte der Kante k_i (für $i = 1, 2, \ldots, n$),

so gibt es mindestens einen weiteren Kreis, in dessen Wegfolge eine Ecke auftritt, die auch in obiger Folge auftritt. Dies gilt, da G zusammenhängend ist.
Dieser Kreis sei etwa R_{i+1}.

Dann gibt es für die Menge $K'' \subset K$, $K'' = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_{i+1}$ eine Folge mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii).
Diese Folge erhält man, wenn die Wegfolge von R_{i+1} in die obige Folge von K' in geeigneter Weise „eingebaut" wird.

Beginnt man das beschriebene Verfahren mit R_1 (dessen Wegfolge die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) hat) und setzt es fort, bis alle Kreise in die konstruierte Folge einbezogen wurden, hat man eine Folge mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) der Definition 2 konstruiert. (i) gilt, da jede Kante in einem Kreis enthalten ist; (ii) gilt, da G zusammenhängend ist.
Also ist G ein Euler-Graph.

14

Satz 7

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph.
G ist ein Euler-Graph genau dann, wenn K ein Zyklus ist.

Beweis:
„⇒"
Satz 1

„⇐"
Nach Satz 5 ist K symmetrische Differenz von disjunkten Kreisen, also nach Definition von Δ auch Vereinigung von disjunkten Kreisen. Nach Satz 6 ist G ein Euler-Graph.

IV Anwendungen

(15)

Problem 1

Die Aufgabenstellung von Problem 1 muß noch auf den diesem Problem zugeordneten Graphen übertragen werden.

Definition 7

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph. Eine Folge $(e_1,k_1,e_2,k_2,\dots,e_n,k_n,e_{n+1})$ heißt eine Eulersche Linie von G, wenn gilt:

(i) $K=\{k_1,k_2,\dots,k_n\}$ und jede Kante aus K tritt in der Folge genau einmal auf,

(ii) $e_1,e_2,\dots,e_{n+1}\in E$, $e_1\neq e_{n+1}$ und jede Ecke aus E tritt in der Folge mindestens einmal auf,

(iii) die Ecken e_i und e_{i+1} sind die beiden Endpunkte der Kante k_i (für $i=1,2,\dots,n$).

Satz 8

Sei $G=(E,K,p)$ ein Graph.
Es gibt eine Eulersche Linie von G genau dann, wenn genau zwei Ecken Endpunkt einer ungeraden Anzahl von Kanten sind.

Beweis:

„$\Rightarrow$"

Gibt es eine Eulersche Linie $(e_1,k_1,e_2,k_2,\dots,e_n,k_n,e_{n+1})$, so werde dem Graphen G die Kante $\overline{k}$ mit den Endpunkten e_1 und e_{n+1} hinzugefügt. Der neue Graph $\overline{G}$ ist ein Euler-Graph, also ist seine Kantenmenge ein Zyklus. Wird die Kante $\overline{k}$ wieder entfernt, erhält man genau zwei Ecken (e_1 und e_{n+1}), die Endpunkt einer ungeraden Anzahl von Kanten sind.

„$\Leftarrow$"

Sind genau zwei Ecken Endpunkt einer ungeraden Anzahl von Kanten, so fügt man dem Graphen eine Kante $\overline{k}$ mit diesen beiden Ecken als Endpunkte hinzu. Die Kantenmenge dieses neuen Graphen $\overline{G}$ ist ein Zyklus, also ist $\overline{G}$ ein Euler-Graph. Wird die Kante $\overline{k}$ wieder entfernt, erhält man aus der Folge des Euler-Graphen $\overline{G}$ eine Eulersche Linie von G.

Der Graph zu Problem 1 enthält also eine Eulersche Linie.

Problem 4 (Dominoproblem) 16

a) Ist es möglich, alle Steine eines Dominospiels mit Zahlen von 0 bis 6 (ohne Steine mit zwei gleichen zahlen) in einem geschlossenen Kette anzuordnen?

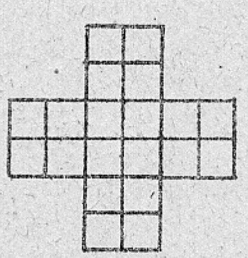
b) Ist dies auch für ein Dominospiel mit Zahlen von 0 bis 5 möglich?

c) Für welche natürlichen Zahlen n ist dies mit einem Dominospiel mit Zahlen von 0 bis n möglich?

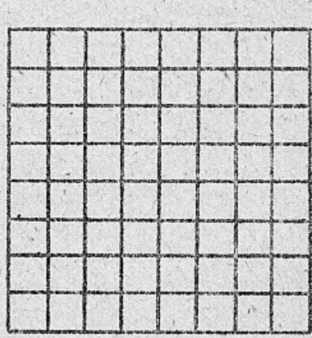
Problem 5

a) Kann man mit einem Springer alle auf dem Brett (1) möglichen Züge hintereinander ausführen?

b) Kann man dies auch auf einem Schachbrett (2)?



(1)

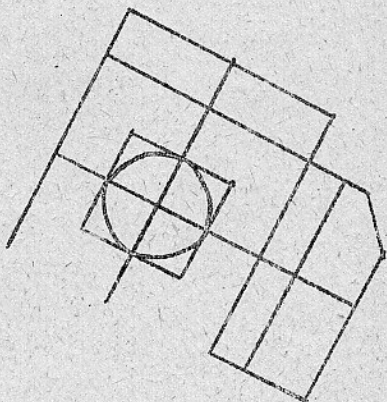


(2)

Problem 6

Der nebenstehende Plan zeigt die Hauptwege des Cimetière de Montparnasse in Paris.

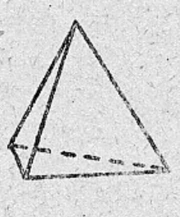
Wie hätte man durch das Anlegen weiterer Wege einen Rundgang ermöglichen können, der an jedem Grab, das sich an einem Weg befindet, genau einmal vorbeiführt.



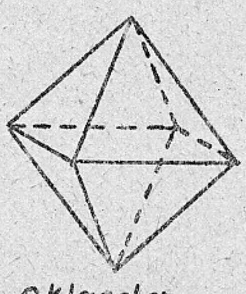
Problem 7

Aus einem Stück Draht der Länge L soll ein Kantenmodell des Tetraeders (Oktaeders, Würfels) mit maximaler Kantenlänge hergestellt werden. Der Draht soll nicht zerschnitten werden.

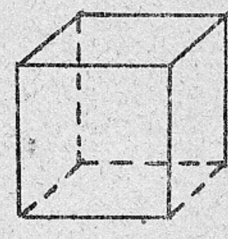
Wie lang sind die Kanten?



Tetraeder



Oktaeder

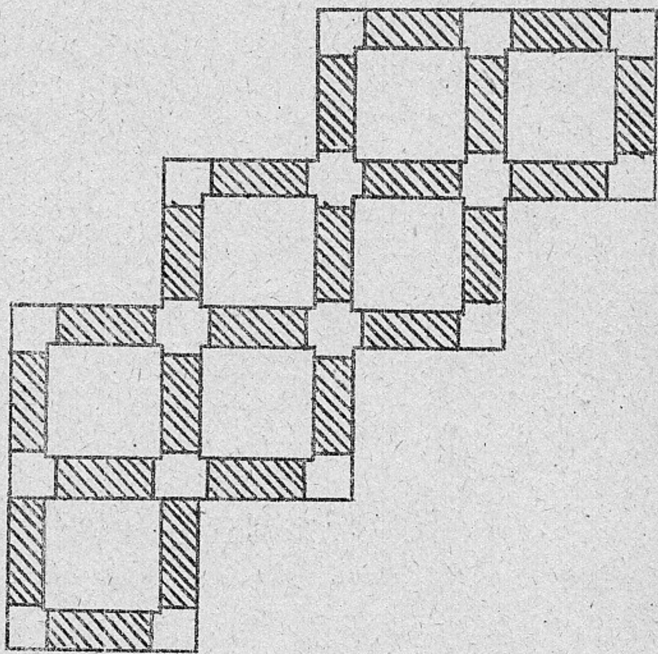


Würfel

(17)

Problem 8

Die Skizze stellt den Grundriß eines einstöckigen Museums dar.



Die schraffierten Bauteile sind Ausstellungshallen, die nicht schraffierten sind Verkehrsflächen.

a) Bestimmen Sie zwei Eingänge, so daß man in einem Gang, der jede Ausstellungshalle genau einmal durchquert und die Innenräume nicht verläßt, von einem Eingang zum anderen gelangen kann.

b) Durch den Anbau von weiteren Ausstellungshallen soll erreicht werden, daß von jeder Verkehrsfläche ein Rundgang möglich ist, der jede Ausstellungshalle genau einmal durchquert und die Innenräume nicht verläßt.
Da das Museum landschaftlich reizvoll gelegen ist, ist eine Vergrößerung des Grundrisses nach außen verboten.

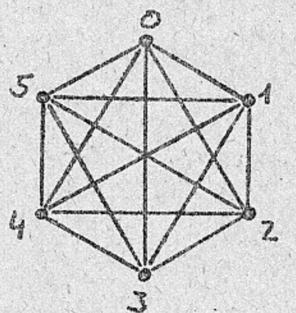
18

Lösungen

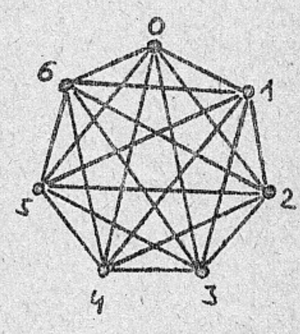
Problem 4

Dem Problem kann man einen Graphen zuordnen, wenn man die Zahlen $0, 1, \ldots, n$ als Ecken und jeden Dominostein mit Zahlen i und j ($i, j \in \{0, 1, \ldots n\}$, $i \neq j$) als Kante mit den Endpunkten i und j auffaßt. Man erhält einen Graphen mit $n+1$ Ecken, in dem je zwei verschiedene Ecken Endpunkte genau einer Kante sind. Ein solcher Graph heißt vollständig. Er ist zusammenhängend.

Für $n=5$ und $n=6$ ergeben sich die nebenstehenden Graphen.



$n=5$



$n=6$

Gefragt ist, ob die Graphen Euler-Graphen sind.

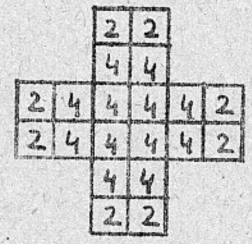
Da in einem vollständigen Graphen mit $n+1$ Ecken jede Ecke Endpunkt von n Kanten ist, ist der Graph für gerades n ein Euler-Graph, für ungerades n kein Euler-Graph. (Satz 7)

Problem 5

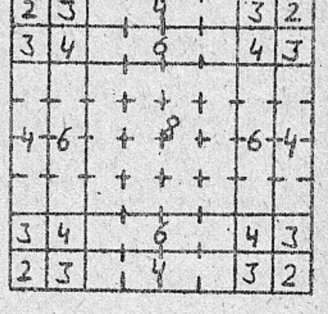
Faßt man jedes Feld als Ecke und jeden möglichen Zug zwischen zwei Feldern als Kante mit entsprechenden Endpunkten auf, so kann man dem Problem einen Graphen zuordnen. Man überzeugt sich, daß beide Graphen (für Brett (1) und (2)) zusammenhängend sind.

Gefragt ist, ob die Graphen Euler-Graphen sind.

In jedes Feld ist die Anzahl der möglichen Züge, die von ihm aus möglich sind, eingetragen; also die Anzahl der Kanten, die die entsprechende Ecke als Endpunkt haben.



(1)



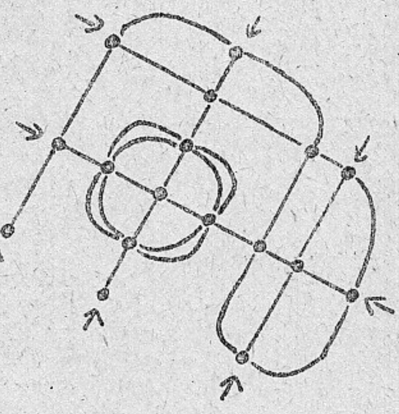
(2)

Nach Satz 7 ist der Graph zu Brett (1) ein Euler-Graph, der Graph zu Brett (2) kein Euler-Graph.

19

Problem 6

Dem Problem kann der nebenstehende Graph zugeordnet werden, wenn man Kreuzungen und die Enden von Wegen als Ecken und die Wegabschnitte zwischen zwei Kreuzungen bzw. Enden als Kanten mit entsprechenden Endpunkten auffaßt. Der Graph ist zusammenhängend.



Der Graph soll durch Hinzufügen von Kanten ein Euler-Graph werden.

Der Graph hat 8 Ecken, die Endpunkt einer ungeraden Anzahl von Kanten sind (Pfeile). Verbindet man je zwei dieser Ecken durch eine Kante oder einen Weg, so erhält man einen Euler-Graph. (Satz 7)

Problem 7

Da der Draht nicht zerschnitten werden darf, müssen eventuell einige Kanten doppelt gebildet werden.

Faßt man die Ecken eines Körpers als Ecken eines Graphen und die Kanten des Körpers als Kanten des Graphen auf, erhält man einen zusammenhängenden Graphen.

Der Graph soll nach dem Hinzufügen einer minimalen Anzahl von Kanten eine Eulersche Linie enthalten oder ein Euler-Graph sein.

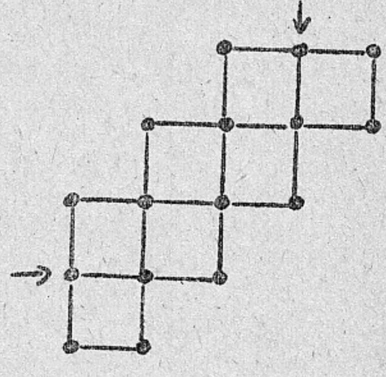
Der Graph des Tetraeders hat 4 Ecken, die Endpunkt einer ungeraden Anzahl von Kanten sind. Verbindet man zwei von ihnen durch eine Kante, enthält der Graph eine Eulersche Linie. (Satz 8)
Im Graphen des Oktaeders ist jede Ecke Endpunkt einer geraden Anzahl von Kanten, also ist der Graph ein Euler-Graph. (Satz 7)
Der Graph des Würfels hat 8 Ecken, die Endpunkt einer ungeraden Anzahl von Kanten sind. Fügt man drei Kanten hinzu, die je zwei dieser Ecken (die bereits die beiden Endpunkte einer Kante sind) verbinden, so enthält der Graph eine Eulersche Linie. (Satz 8)

Beim Tetraeder wurde zu den 6 Kanten eine hinzugefügt, beim Oktaeder zu den 12 Kanten keine und beim Würfel zu den 12 Kanten drei weitere.
Die maximale Kantenlänge ist also beim Tetraeder $\frac{l}{6}$, beim Oktaeder $\frac{l}{12}$ und beim Würfel $\frac{l}{15}$.

Problem 8 (20)

Man erhält einen Graphen zum Problem, wenn man jede Verkehrsfläche als Ecke und jede Ausstellungshalle zwischen zwei Verkehrsflächen als Kante mit entsprechenden Endpunkten auffaßt. Der Graph ist zusammenhängend.

Gesucht ist das erste und das letzte Folgenglied einer Eulerschen Linie.



Es gibt genau zwei Ecken, die Endpunkte einer ungeraden Anzahl von Kanten sind (Pfeil). Also enthält der Graph eine Eulersche Linie und die beiden Ecken, die Endpunkte einer ungeraden Anzahl von Kanten sind, sind erstes bzw. letztes Folgenglied. (Satz 8)

Weiter soll der Graph durch das Hinzufügen von Kanten ein Euler-Graph werden.

Verbindet man die Ecken, die Endpunkt einer ungeraden Anzahl von Kanten sind durch eine Kante oder einen Weg, erhält man einen Euler-Graph. Dabei muß die Nebenbedingung beachtet werden. Man kann drei Ausstellungshallen im Erdgeschoß einbauen oder eine oder mehrere Ausstellungshallen als zweites Stockwerk bauen.

Literatur

zur weiteren Beschäftigung mit Graphentheorie:

W. Dörfler, J. Mühlbacher, Graphentheorie für Informatiker. Berlin, New York 1973

O. Ore, Graphen und ihre Anwendungen. Stuttgart 1974

J. Sedláček, Einführung in die Graphentheorie. Leipzig 1972

Die Bücher von Ore und Sedláček sind gut lesbare Einführungen; das Buch von Dörfler und Mühlbacher behandelt Möglichkeiten der Datenverarbeitung in der Graphentheorie.

Weitere Literatur findet man in den Literaturhinweisen des Buches von Ore.

Anmerkungen zum Textbuch

Seite 1 Königsberger Brückenproblem: Euler,[9]
das Zitat von Euler ist aus der deutschen Übersetzung [9],S.128
Erschwerte Überfahrt: König,[15],S.111

Seite 5 das Zitat von Euler ist aus der deutschen Übersetzung [9],S.128

Seite 10 die Vektorraumbedingung (iii) muß heißen:

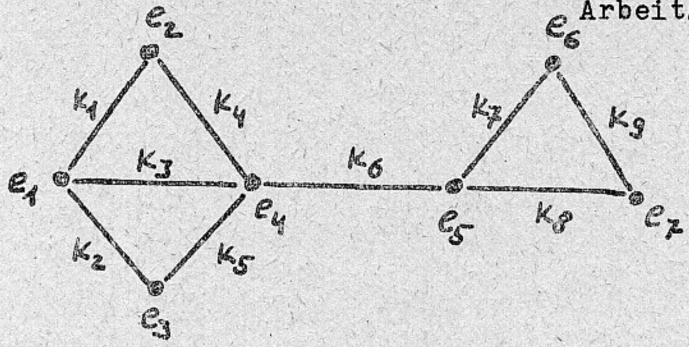
$$\bigwedge_{\substack{A \in \mathcal{R}(M) \\ \alpha,\beta \in \{0,1\}}} (\alpha+\beta) \odot A = (\alpha \odot A) \triangle (\beta \odot A)$$

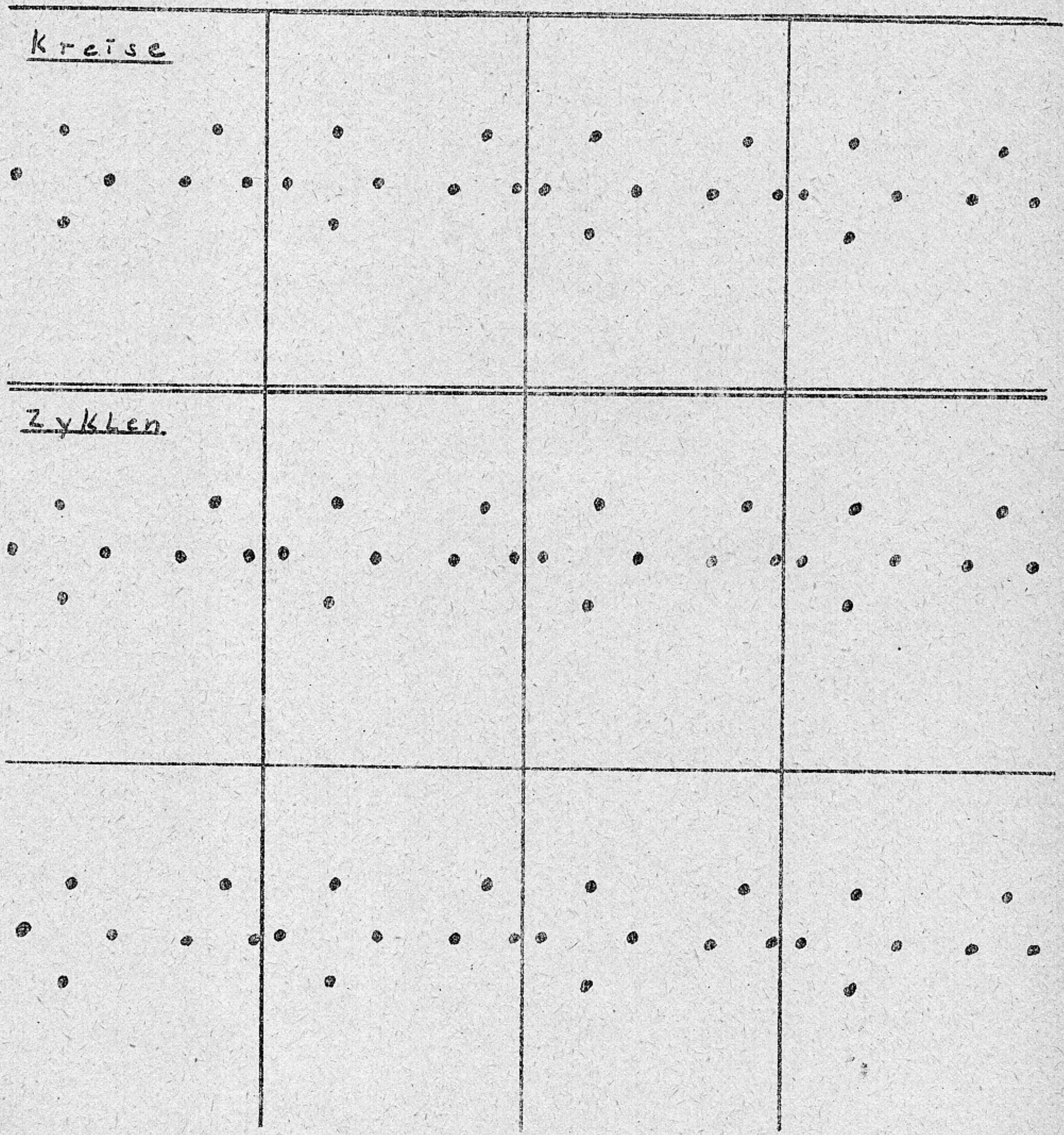
Seite 14 Satz 7 muß heißen:
G ist ein Euler-Graph genau dann, wenn $K \neq \emptyset$ und K ein Zyklus ist.

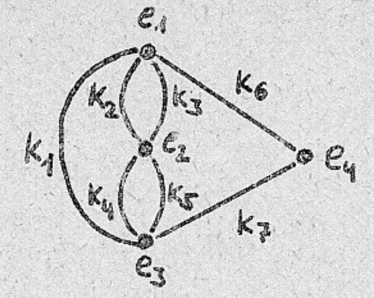
Seite 16 Dominoproblem: König,[15],S.24-25
Problem 5b: Ore,[19],S.32-33
Problem 6: Plan des Cimetière de Montparnasse nach Michelin - Paris et sa banlieue,[17],S.144
Problem 7: Bigalke,[3],S.201-202, Skizzen der Körper nach Ore,[19],S.104

2. Arbeitsbögen

Arbeitsbogen 1





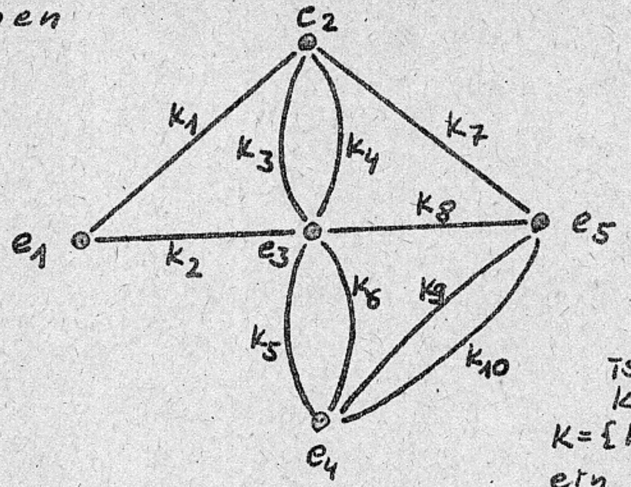


Arbeitsbogen 2

Kreise					
Zyklen					

Arbeitsbogen 3

Im Graphen



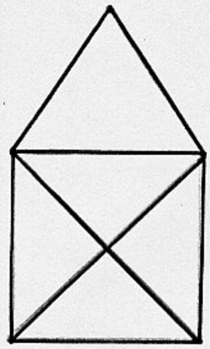
ist die Menge aller Kanten $K = \{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{10}\}$ ein Zyklus.

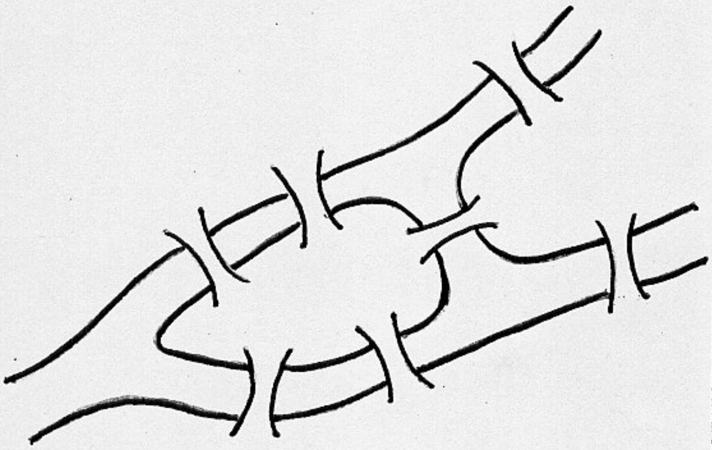
a) Bestimmen Sie nach dem Verfahren des Beweises von Satz 4 einen Kreis, der im Zyklus K enthalten ist.

b) Bestimmen Sie nach dem Verfahren des Beweises von Satz 5 eine Menge von disjunkten Kreisen, so daß K die Vereinigung der Kreise ist.

3. Folien

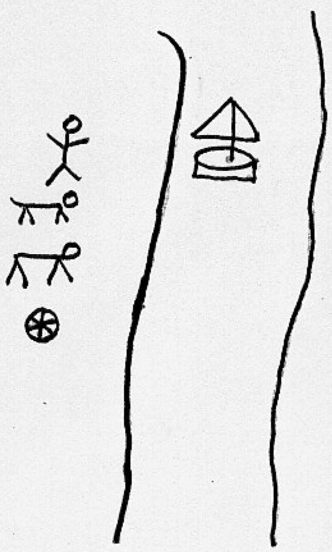
Folie 1





Folie 2

Fährmann
Wolf
Ziege
Kohlkopf

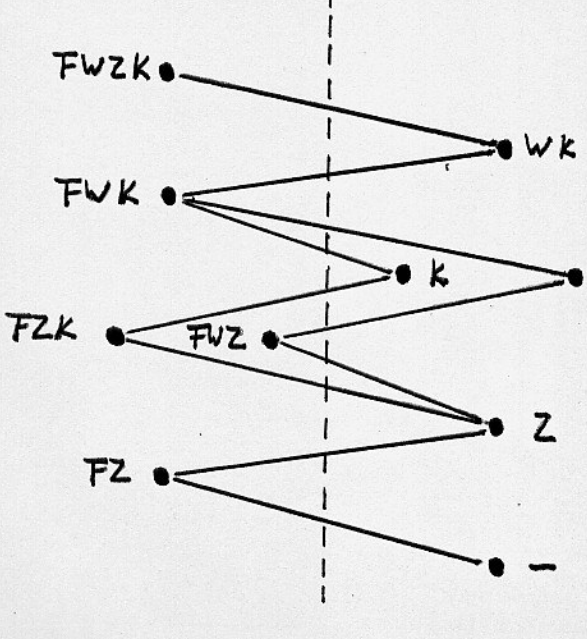


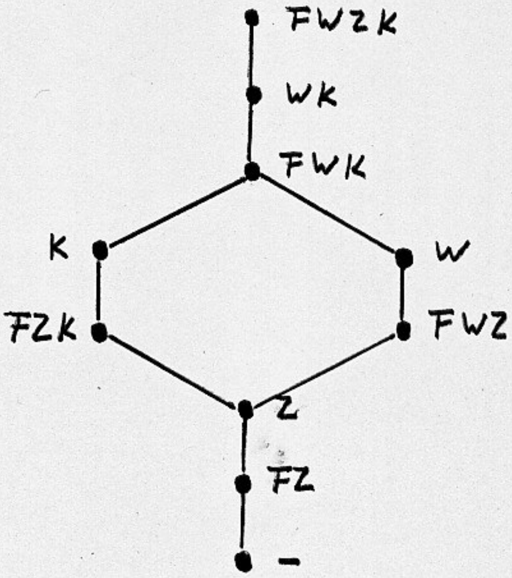
Ausgangsufer	Zielufer
FWZK	—
FWZ	K
FW K	Z
F ZK	W
WZK	F
FW	ZK
F Z	W K
F K	WZ
WZ	F K
W K	F Z
ZK	FW
F	WZK
W	F ZK
Z	FW K
K	FWZ
—	FWZK

Ecken: FWZK, FWZ, FWK, FZK, FZ, WK, W, Z, K, —

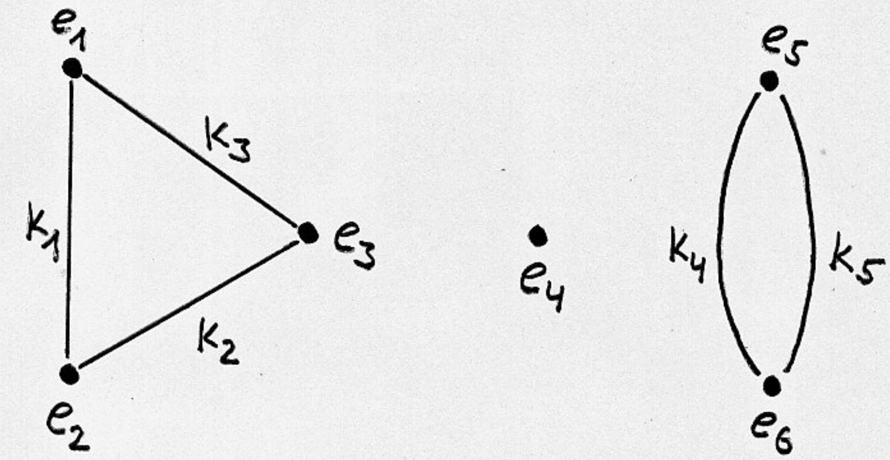
Kanten: mögliche Übergänge von einer Situation zu einer anderen

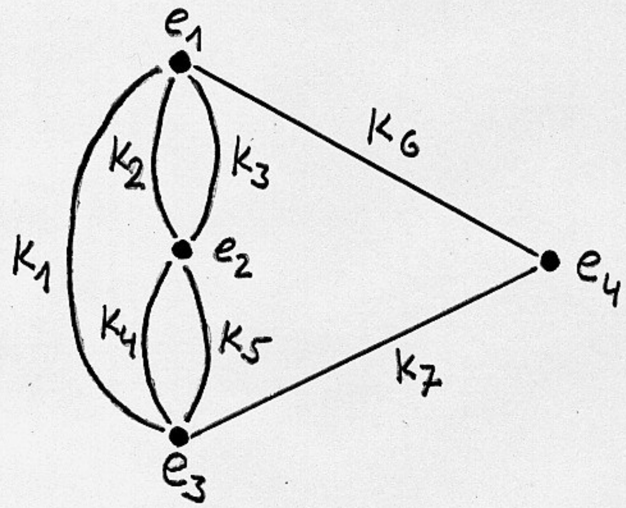
Fährmann befindet sich am
Ausgangsufer | Zielufer

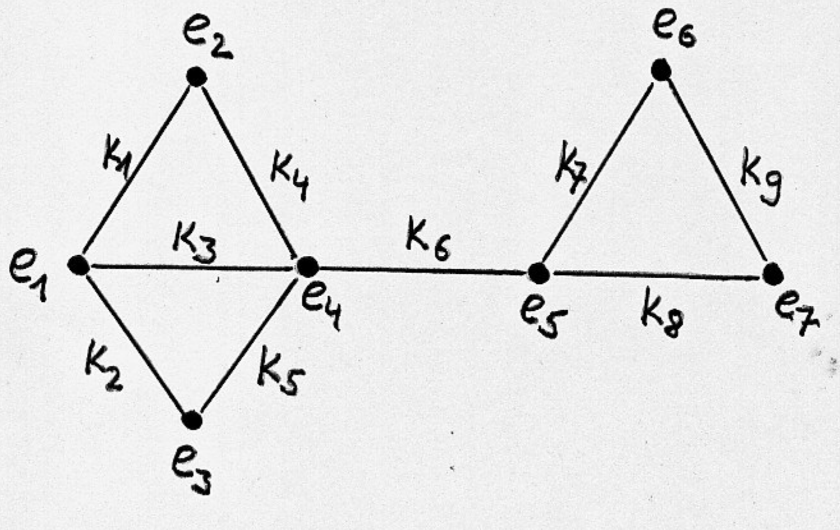




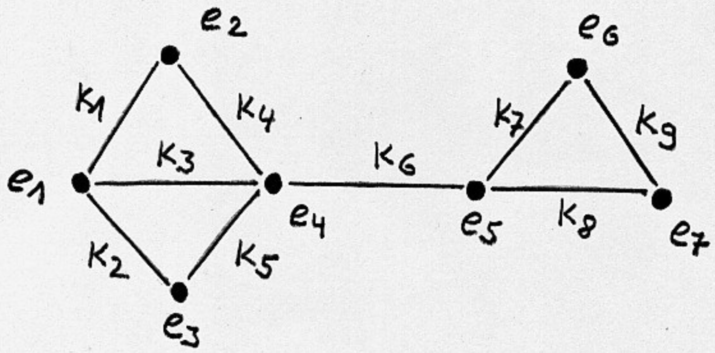
Folie 3

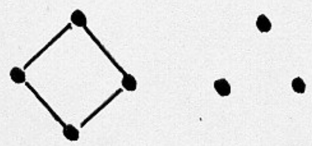
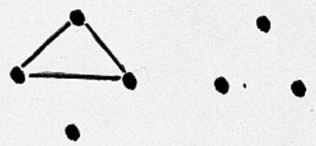
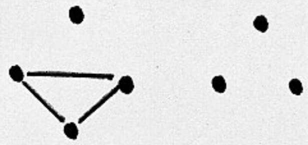
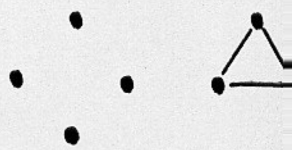
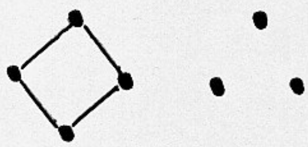
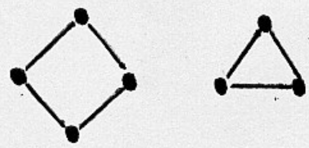
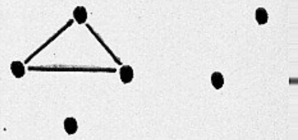
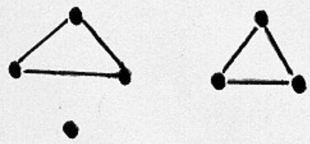
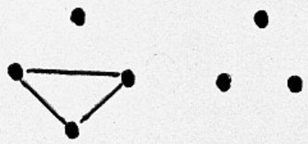
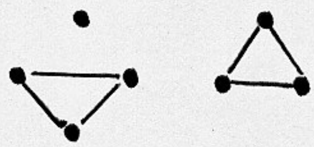
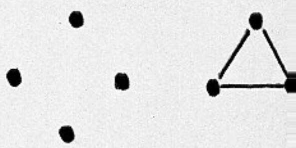

e_1
k_3
k_1
e_3
e_4
e_5
k_4
k_5
k_2
e_2
e_6


e_1
k_2
k_3
k_6
k_1
e_2
e_4
k_4
k_5
k_7
e_3

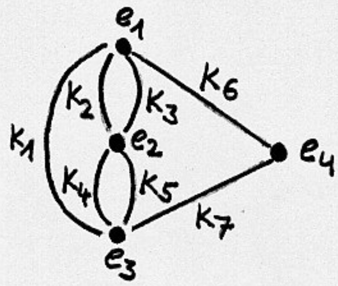

e_2
e_6
k_1
k_4
k_7
k_9
k_3
k_6
e_1
e_4
e_5
k_8
e_7
k_2
k_5
e_3

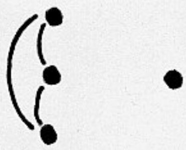
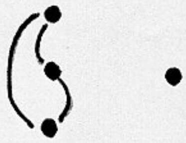
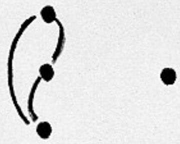
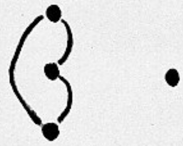
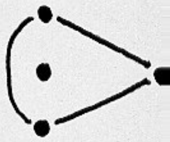
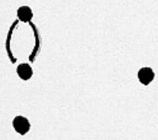
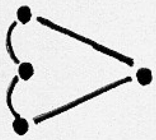
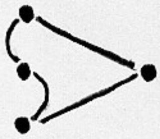
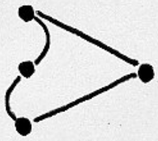
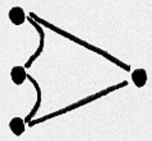
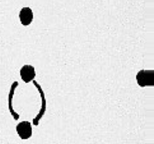
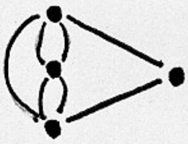
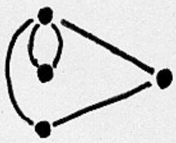
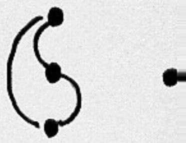
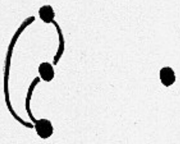
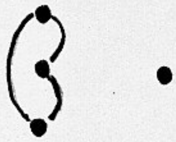
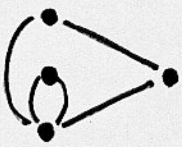
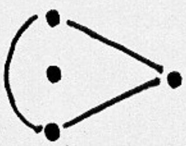
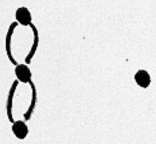
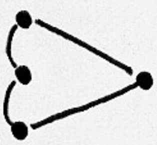
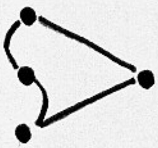
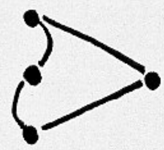
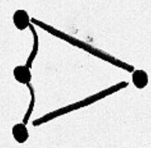
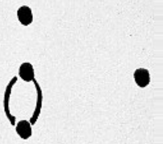
Folie 4



KREISE			
 $\{K_1, K_2, K_4, K_5\}$	 $\{K_1, K_3, K_4\}$	 $\{K_2, K_3, K_5\}$	 $\{K_7, K_8, K_9\}$
ZYKLEN			
 $\emptyset$	 $\{K_1, K_2, K_4, K_5\}$	 $\{K_1, K_2, K_4, K_5, K_7, K_8, K_9\}$	 $\{K_1, K_3, K_4\}$
 $\{K_1, K_3, K_4, K_7, K_8, K_9\}$	 $\{K_2, K_3, K_5\}$	 $\{K_2, K_3, K_5, K_7, K_8, K_9\}$	 $\{K_7, K_8, K_9\}$

Folie 5



KREISE	 $\{K_1, K_2, K_4\}$	 $\{K_1, K_2, K_5\}$	 $\{K_1, K_3, K_4\}$	 $\{K_1, K_3, K_5\}$	 $\{K_1, K_6, K_7$
 $\{K_2, K_3\}$	 $\{K_2, K_4, K_6, K_7\}$	 $\{K_2, K_5, K_6, K_7\}$	 $\{K_3, K_4, K_6, K_7\}$	 $\{K_3, K_5, K_6, K_7\}$	 $\{K_4, K_5\}$
ZYKLEN	 $\emptyset$	 $\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7\}$	 $\{K_1, K_2, K_3, K_6, K_7\}$	 $\{K_1, K_2, K_4\}$	 $\{K_1, K_2, K_5$
	 $\{K_1, K_3, K_4\}$	 $\{K_1, K_3, K_5\}$	 $\{K_1, K_4, K_5, K_6, K_7\}$	 $\{K_1, K_6, K_7\}$	 $\{K_2, K_3\}$
 $\{K_2, K_3, K_4, K_5\}$	 $\{K_2, K_4, K_6, K_7\}$	 $\{K_2, K_5, K_6, K_7\}$	 $\{K_3, K_4, K_6, K_7\}$	 $\{K_3, K_5, K_6, K_7\}$	 $\{K_4, K_5\}$

Folie 6

(i) zz. $\bigwedge\limits_{\substack{A,B \in \mathcal{R}(M) \\ \alpha \in \{0,1\}}} \alpha \odot (A \triangle B) = (\alpha \odot A) \triangle (\alpha \odot B)$

a) $(\alpha = 0)$ $\bigwedge\limits_{A,B \in \mathcal{R}(M)} 0 \odot (A \triangle B) = \emptyset = \emptyset \triangle \emptyset = (0 \odot A) \triangle (0 \odot B)$

b) $(\alpha = 1)$ $\bigwedge\limits_{A,B \in \mathcal{R}(M)} 1 \odot (A \triangle B) = A \triangle B = (1 \odot A) \triangle (1 \odot B)$

(ii) zz. $\bigwedge\limits_{\substack{A \in \mathcal{R}(M) \\ \alpha, \beta \in \{0,1\}}} (\alpha \cdot \beta) \odot A = \alpha \odot (\beta \odot A)$

a) $(\alpha = 0, \beta = 0)$ $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{R}(M)} (0 \cdot 0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset = 0 \odot \emptyset = 0 \odot (0 \odot A)$

b) $(\alpha = 0, \beta = 1)$ $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{R}(M)} (0 \cdot 1) \odot A = 0 \odot A = 0 \odot (1 \odot A)$

c) $(\alpha = 1, \beta = 0)$ $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{R}(M)} (1 \cdot 0) \odot A = 0 \odot A = 1 \odot (0 \odot A)$

d) $(\alpha = 1, \beta = 1)$ $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{R}(M)} (1 \cdot 1) \odot A = 1 \odot A = 1 \odot (1 \odot A)$

(iii) zz. $\bigwedge\limits_{\substack{A \in \mathcal{R}(M) \\ \alpha, \beta \in \{0,1\}}} (\alpha + \beta) \odot A = (\alpha \odot A) \triangle (\beta \odot A)$

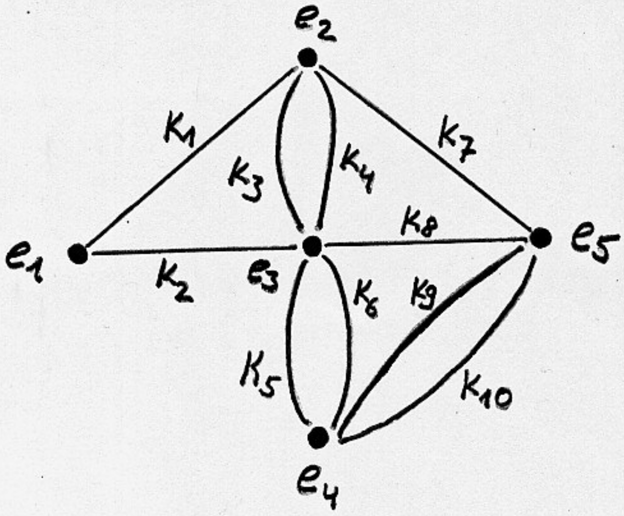
a) $(\alpha = 0, \beta = 0)$ $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{R}(M)} (0+0) \odot A = 0 \odot A = \emptyset = \emptyset \triangle \emptyset = (0 \odot A) \triangle (0 \odot A)$

b) $(\alpha = 0, \beta = 1)$ $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{R}(M)} (0+1) \odot A = 1 \odot A = \emptyset \triangle (1 \odot A) = (0 \odot A) \triangle (1 \odot A)$

c) $(\alpha = 1, \beta = 0)$ $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{R}(M)} (1+0) \odot A = 1 \odot A = (1 \odot A) \triangle \emptyset = (1 \odot A) \triangle (0 \odot A)$

d) $(\alpha = 1, \beta = 1)$ $\bigwedge\limits_{A \in \mathcal{R}(M)} (1+1) \odot A = 0 \odot A = \emptyset = A \triangle A = (1 \odot A) \triangle (1 \odot A)$

Folie 7



$k_8 \quad e_3, e_5$

$k_{10} \quad e_5, e_4 \quad e_4 \neq e_3$

$k_6 \quad e_4, e_3 \quad e_3 = e_3$

$\{k_6, k_8, k_{10}\}$

$(e_3, k_8, e_5, k_{10}, e_4, k_6, e_3)$

$R_1 = \{k_5, k_6\}$

$Z \Delta R_1 = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_7, k_8, k_9, k_{10}\}$

$R_2 = \{k_1, k_2, k_7, k_8\}$

$Z \Delta R_1 \Delta R_2 = \{k_3, k_4, k_9, k_{10}\}$

$R_3 = \{k_3, k_4\}$

$Z \Delta R_1 \Delta R_2 \Delta R_3 = \{k_9, k_{10}\}$

$R_4 = \{k_9, k_{10}\}$

$Z \Delta R_1 \Delta R_2 \Delta R_3 \Delta R_4 = \emptyset$

$\boxed{Z = R_1 \Delta R_2 \Delta R_3 \Delta R_4}$

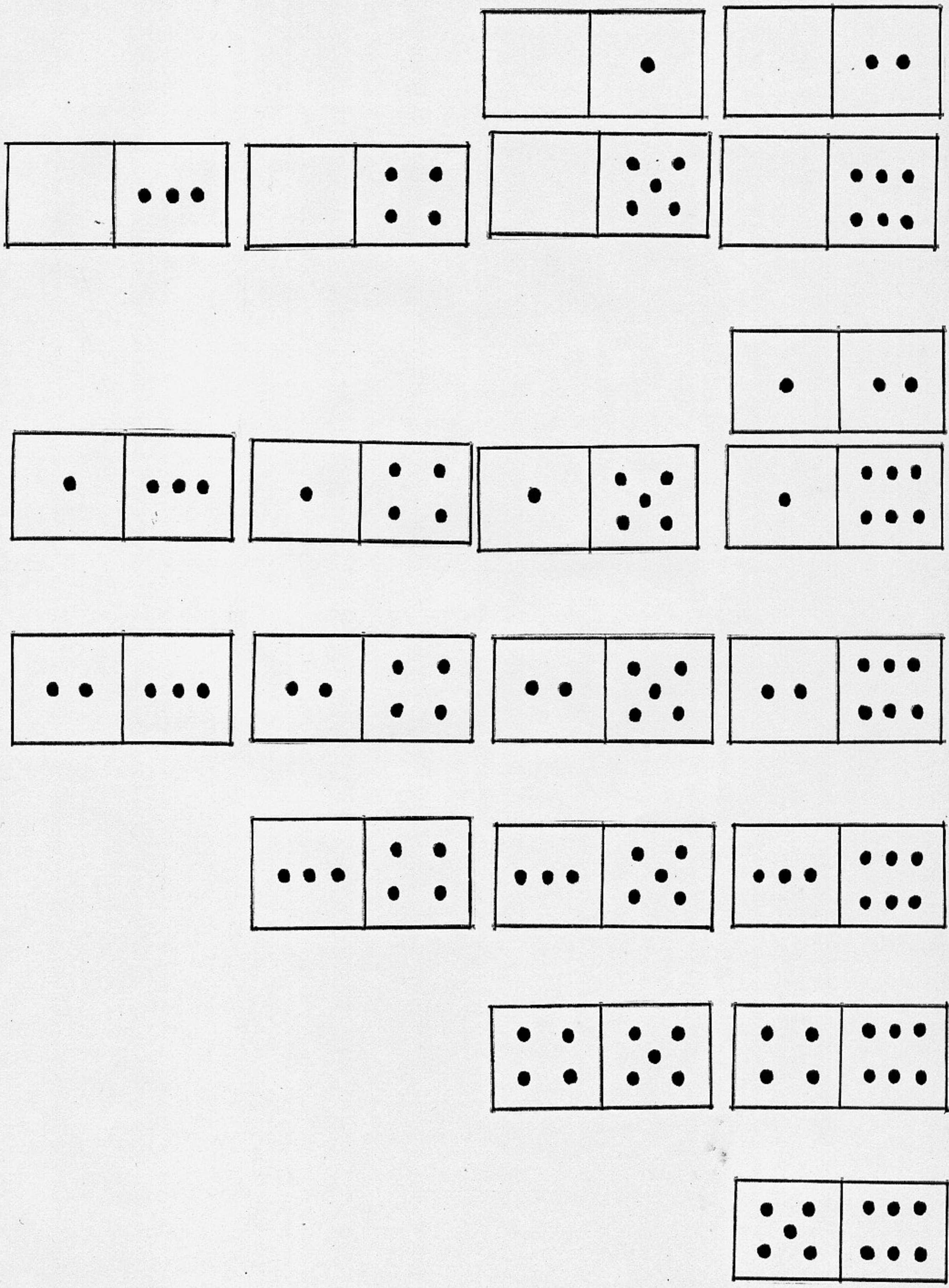
$R_1 \quad (\underline{e_3}, k_5, e_4, k_5, \underline{e_3})$

$R_2 \cup R_1 \quad (e_3, k_5, e_4, k_6, \underbrace{e_3, k_2, e_1, k_1, \underline{e_2}, k_7, e_5, k_8, e_3})$

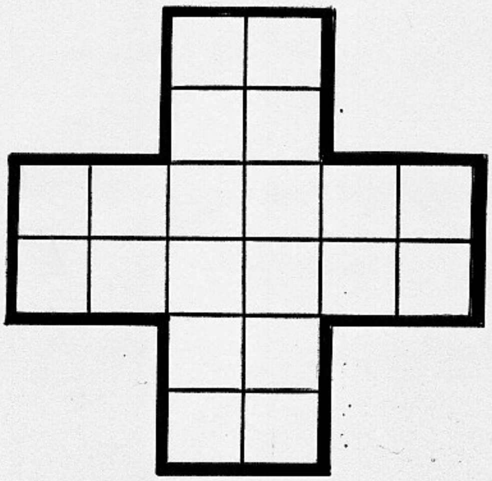
$R_3 \cup R_2 \cup R_1 \quad (e_3, k_5, \underline{e_4}, k_6, e_3, k_2, e_1, k_1, \underbrace{e_2, k_3, e_3, k_4, e_2}, k_7, e_5, k_8, e_3)$

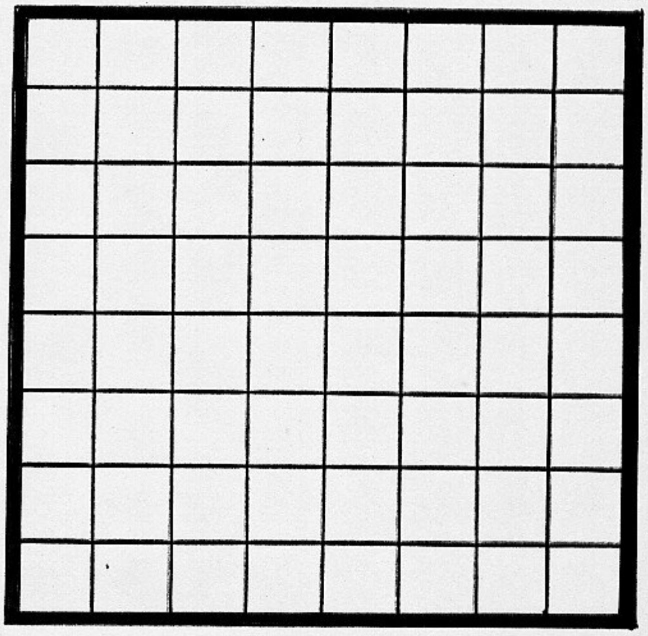
$R_4 \cup R_3 \cup R_2 \cup R_1 \quad (e_3, k_5, \underbrace{e_4, k_9, e_5, k_{10}, e_4}, k_6, \ldots)$

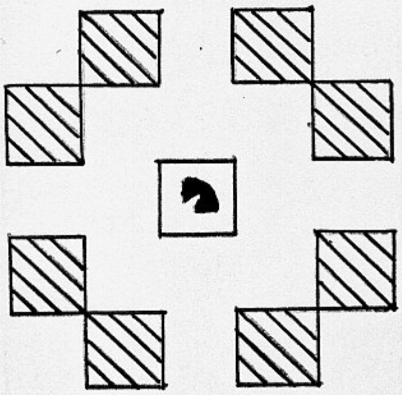
Folie 8



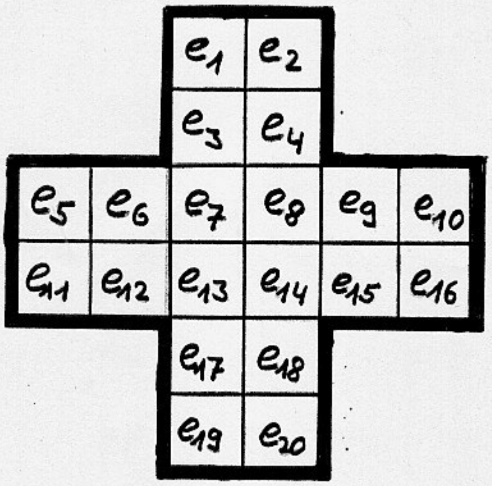
Folie 9

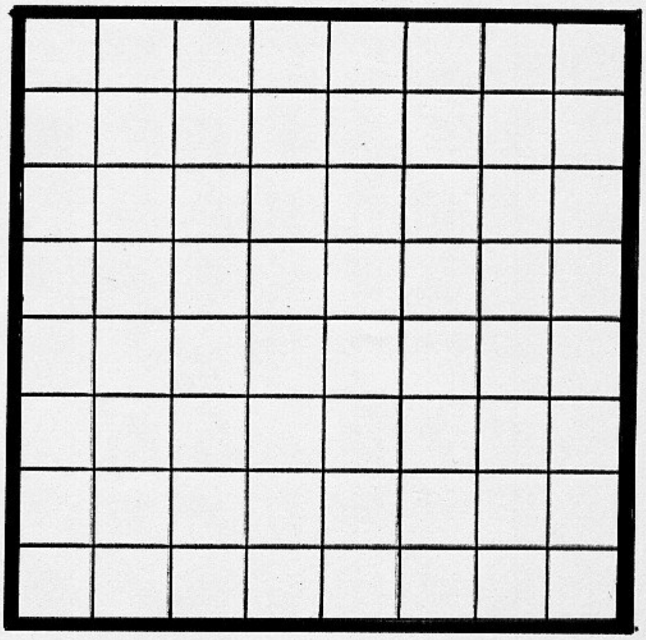


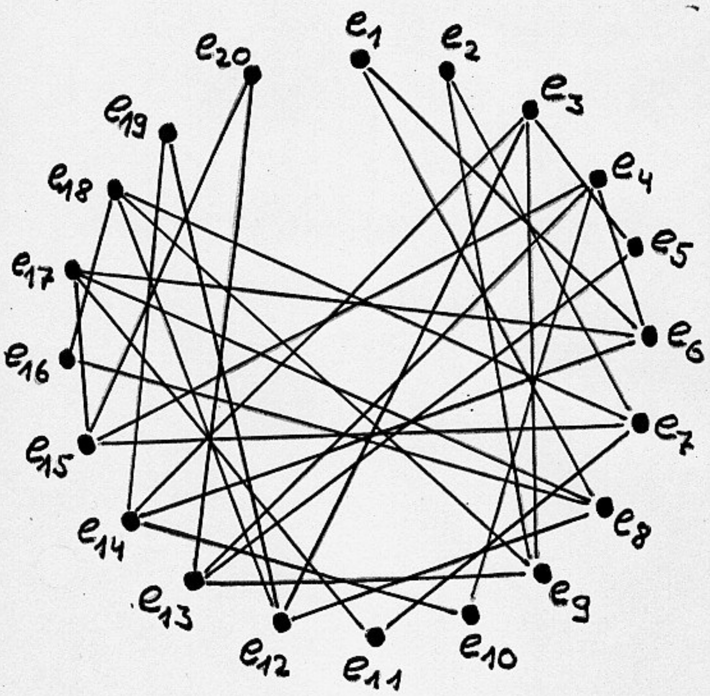


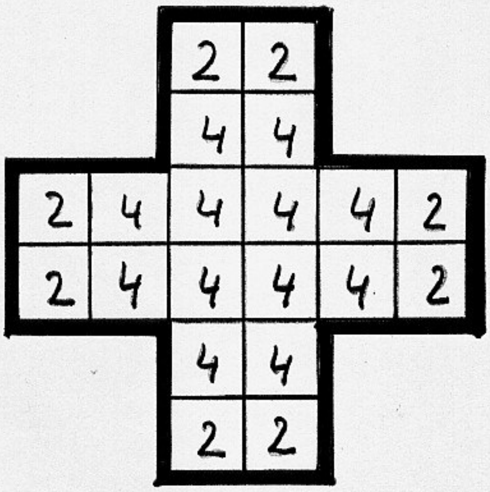


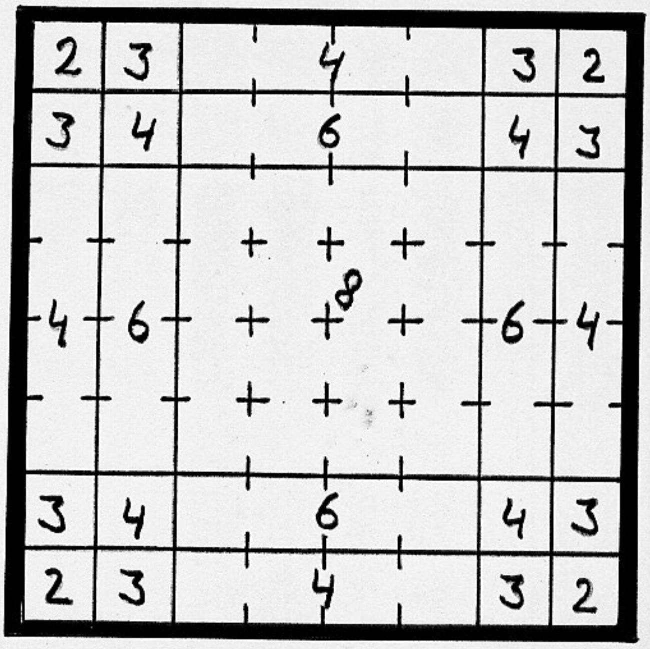
Folie 10


e_1 e_2
e_3 e_4
e_5 e_6 e_7 e_8 e_9 e_{10}
e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} e_{15} e_{16}
e_{17} e_{18}
e_{19} e_{20}

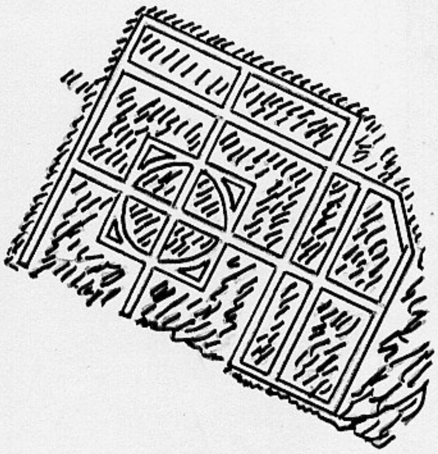


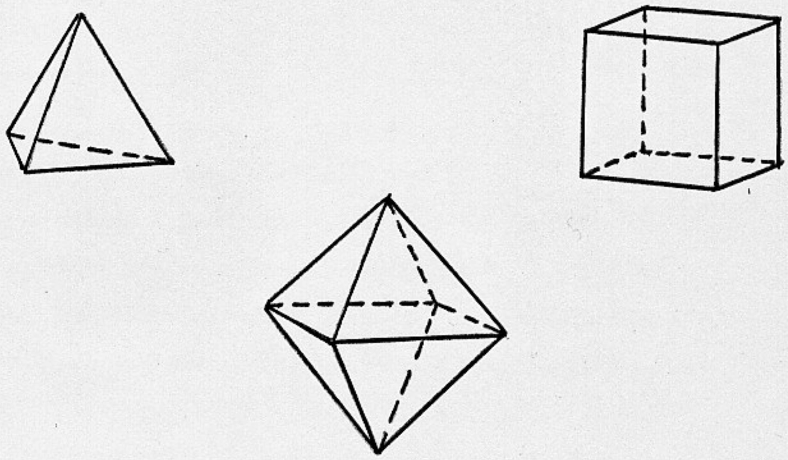

e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
e_8
e_9
e_{10}
e_{11}
e_{12}
e_{13}
e_{14}
e_{15}
e_{16}
e_{17}
e_{18}
e_{19}
e_{20}

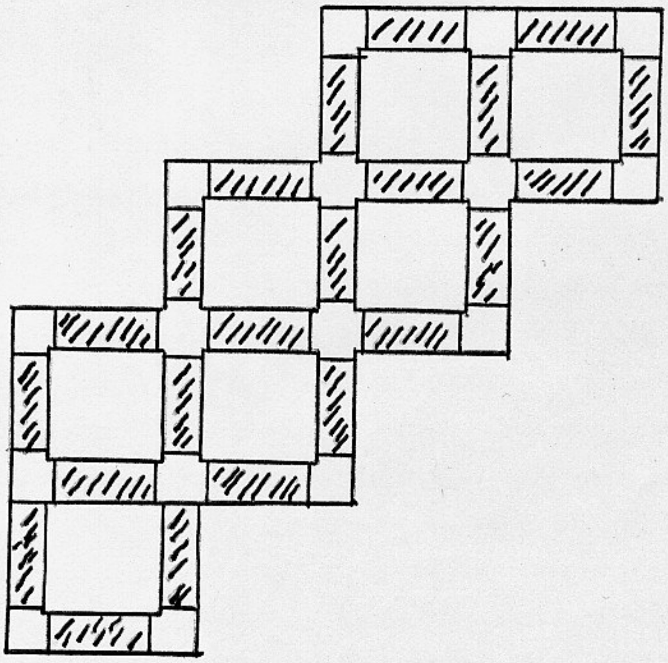

2 2
4 4
2 4 4 4 4 2
2 4 4 4 4 2
4 4
2 2


2 3 4 3 2
3 4 6 4 3
4 6 8 6 4
3 4 6 4 3
2 3 4 3 2

Folie 11







Literatur

[1] C.Berge, Théorie des graphes et ses applications. Paris 1967 (2ème édition)

[2] C.Berge, Graphes et hypergraphes. Paris 1970

[3] H.-G.Bigalke, Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik. Didaktik der Mathematik 2 (1974), 189-216

[4] N.L.Biggs, E.K.Lloyd, R.J.Wilson, Graph theory 1736-1936. Oxford 1976

[5] P.Brunnhuber, Prinzipien effektiver Unterrichtsgestaltung. Donauwörth 1976 (9.Auflage)

[6] G.Clauß, H.Ebner, Grundlagen der Statistik. Frankfurt a.M., Zürich 1971

[7] B.Döring, Zyklen und Cozyklen in Hypergraphen. (Diplomarbeit). Bielefeld 1975

[8] Empfehlungen für den Kursunterricht im Fach Mathematik. Herausgegeben vom Kultusministerium des Landes Nordrhein-Westfalen. Düsseldorf 1972 (2.Auflage)

[9] L.Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736), 128-140 deutsch in: Speiser (Hrsg.), Klassische Stücke der Mathematik. Zürich, Leipzig 1925, S.127-138

[10] H.Freudenthal, Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben? Der Mathematikunterricht 9 (1963),Heft 4, 5-29

[11] F.Harary, Graph theory. Reading, Mass. 1969

[12] F.Harary (Hrsg.), Proof techniques in graph theory. New York 1969

[13] M.Jeger, Elementare Begriffe und Sätze aus der Theorie der Graphen. Der Mathematikunterricht 20 (1974), Heft 4, 11-64

[14] W.Klafki, Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung. In: Roth, Blumenthal (Hrsg.), Auswahl 1 - Grundlegende Aufsätze aus der Zeitschrift Die Deutsche Schule. Hannover 1964, S.5-34

[15] D.König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936. Nachdruck: New York 1960

[16] Mathematik-Unterrichtsempfehlungen. Sekundarstufe I - Gymnasium. Herausgegeben vom Kultusministerium des Landes Nordrhein-Westfalen. Ratingen 1975

[17] Michelin - Paris et sa banlieue. Paris 1976

[18] G.J.Minty, On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network-programming. Journal of Mathematics and Mechanics 15 (1966), 485-520

[19] O.Ore, Graphs and their uses. New York 1963

[20] Runderlaß des Kultusministers vom 8.7.1976 (III A 1 36 - 20/0 - 1829/76). GABl.NW.S.388-390

[21] H.Sachs, Gedanken zur Entwicklung der Theorie der endlichen Graphen. Mathematik in der Schule 8 (1970), 183-197

[22] H.Whitney, On the abstract properties of linear dependence. American Journal of Mathematics 57 (1935), 509-533

[23] E.Wittmann, Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1975 (2.Auflage)