

Bernd Döring

Zyklen und Cozyklen in Hypergraphen

Diplomarbeit

Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik

1975

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
1. Gerüste zu Unterräumen von $\mathcal{R}(M)$	7
2. Zyklen und Cozyklen	22
3. Kreise und trennende Kantenmengen	34
Anhang	
1. Endlichdimensionale Vektorräume mit innerem Produkt	42
2. Adjungierte Abbildungen	46
3. Der $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum $\mathcal{R}(M)$	49
Literatur	51

Vorwort

Zyklen und Cozyklen in ungerichteten Graphen werden seit langem untersucht. Die ersten wichtigen Veröffentlichungen stammen von L.Euler ([9],1736), G.Kirchhoff ([15],1847), O.Veblen ([20],1931), H.Whitney ([21],1935) und D.König ([16],1936).

Danach wurden zahlreiche Arbeiten veröffentlicht, die sich mit diesem Thema beschäftigen und verschiedene mathematische Methoden anwenden (Graphentheorie, lineare Algebra, Matroide).

Mit der Einführung von Hypergraphen (C.Berge,[4]) stellte sich die Frage, wie Zyklen und Cozyklen geeignet auf Hypergraphen verallgemeinert werden können. Berge hat in [4] eine Definition für Zyklen in Hypergraphen gegeben (S.375), die eine Verallgemeinerung des Kreises in ungerichteten Graphen ist. Dabei gehen jedoch wichtige Eigenschaften verloren, die aus der Tatsache folgen, daß in einem ungerichteten Graphen für jeden Kreis und jede Summe von Kreisen gilt: für jede Ecke ist die Anzahl der Kanten des Kreises (bzw. die Anzahl der Kanten der Summe von Kreisen), die mit dieser Ecke inzident sind, gerade. Dies gilt für die von Berge definierten Zyklen in Hypergraphen jedoch i.A. nicht. L.Oubiña gibt in [18] eine Definition von Zyklen in Hypergraphen, die die algebraischen Eigenschaften, die Zyklen in ungerichteten Graphen besitzen, erhält. Oubiña gibt auch eine entsprechende Verallgemeinerung von Cozyklen an, geht jedoch von einer anderen Hypergraph-Definition aus als Berge.

Wir werden, ausgehend von der Hypergraph-Definition von Berge, die wir etwas erweitern, Zyklen und Cozyklen in Hypergraphen so definieren, daß die algebraischen Eigenschaften von Zyklen und Cozyklen in ungerichteten Graphen auf Hypergraphen übertragen werden können. Für den Fall, daß ein Hypergraph nach der Definition von Oubiña, als auch nach unserer Definition vorliegt, stimmen Zyklen und Cozyklen nach Oubiñas und unserer Definition überein.

Im ersten Teil definieren wir Gerüste zu Unterräumen der Potenzmenge einer endlichen Menge M . Die gegebene Definition eines Gerüsts zu einem Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{R}(M)$ entspricht der Definition des "arbre associé à $\mathcal{U}^\perp$ " von A.Ghouila-Houri ([11], S.279), wenn als Ring $\mathbb{Z}_2$, als Indexmenge M und der zu $\mathcal{U}$ orthogonale Unterraum $\mathcal{U}^\perp$ als Untermodul von $\mathcal{R}(M)$ ($\cong \mathbb{Z}_2^M$) gewählt wird. Wir konstruieren dann eine Basis von $\mathcal{U}$ und charakterisieren die Gerüste $M' \in \mathcal{R}(M)$ zu $\mathcal{U}$ durch die natürlichen Homomorphismen von $\mathcal{R}(M)$ in $\mathcal{R}(M)/\mathcal{U}$ und von $\mathcal{R}(M)$ in $\mathcal{R}(M)/\mathcal{R}(M')$. Dann betrachten wir den zu $\mathcal{U}$ orthogonalen Unterraum $\mathcal{U}^\perp$ von $\mathcal{R}(M)$ und charakterisieren die Gerüste zu $\mathcal{U}^\perp$. Schließlich beschäftigen wir uns noch mit den elementaren Elementen von $\mathcal{U}$.

Im zweiten Teil definieren wir Zyklen und Cozyklen in Hypergraphen als Elemente des Kerns des Randoperators bzw. als Elemente des Bilds des Corandoperators. Randoperator und Corandoperator sind Verallgemeinerungen der entsprechenden Abbildungen bei ungerichteten Graphen (vgl. etwa Harary,

[14], S.37). Die Menge der Zyklen und die Menge der Cozyklen sind zueinander orthogonale Unterräume des $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraums der Potenzmenge der Kantenmenge. Ein Gerüst eines Hypergraphen wird als Gerüst zur Menge der Zyklen, ein Co-Gerüst eines Hypergraphen als Gerüst zur Menge der Cozyklen definiert. Die Ergebnisse des ersten Teil sind dann sowohl auf die Gerüste als auch auf die Co-Gerüste eines Hypergraphen anwendbar. Dann werden einige Sätze, die Zyklen und Cozyklen charakterisieren, - aus der Graphentheorie für ungerichtete Graphen bekannt - für Hypergraphen bewiesen. Wir definieren Büschel als Verallgemeinerung des entsprechenden Begriffs bei Graphen (vgl. König, [16], S.128) und zeigen, wann eine Menge von Büscheln eine Basis der Menge aller Cozyklen ist. Zum Schluß verallgemeinern wir noch die Begriffe "EULER-Graph" und "paarer Graph".

Im dritten Teil werden die Begriffe "Kreis" und "trennende Kantenmenge" auf Hypergraphen verallgemeinert. Wir zeigen, daß die Begriffe elementarer Zyklus und Kreis sowie elementarer Cozyklus und trennende Kantenmenge in ungerichteten Graphen und nur in diesen zusammenfallen.

Die in der Arbeit benutzten Sätze der linearen Algebra sind bekannt, so daß auf eine Darstellung aller benutzten Sätze verzichtet wurde. Im Anhang sind einige Sätze über endlich-dimensionale Vektorräume mit innerem Produkt und über adjungierte Abbildungen dargestellt, die sich zum großen Teil aus E.Artin, [1] und N.Bourbaki, [5] und [6] ergeben. Weiter wird

kurz der $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum der Potenzmenge einer endlichen Menge beschrieben.

Für intensive und fruchtbare Gespräche danke ich Herrn Professor Dr. Ulrich Knauer, Universität Oldenburg, der die Arbeit betreut hat.

1. Gerüste zu Unterräumen von $\mathcal{R}(M)$

Wir werden in diesem Teil Definitionen und Sätze von Gerüsten bzw. Co-Gerüsten in ungerichteten Graphen verallgemeinern. Da die Menge der Zyklen und die Menge der Cozyklen Unterräume des $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraums der Potenzmenge der Kantenmenge sind (sowohl in ungerichteten Graphen als auch in Hypergraphen), werden wir Gerüste zu Unterräumen der Potenzmenge einer endlichen Menge betrachten. Die Gerüste in einem ungerichteten Graphen sind dann genau die Gerüste zur Menge der Zyklen, die Co-Gerüste genau die Gerüste zur Menge der Cozyklen. Entsprechend werden Gerüste und Co-Gerüste in einem Hypergraphen definiert (s. 2. Teil), so daß alle Ergebnisse auf Gerüste und Co-Gerüste in Hypergraphen anwendbar sind. Eine weitergehende Verallgemeinerung führt A.Ghouila-Houri ([11]) durch.

Sei M eine endliche Menge, $\mathcal{R}(M)$ der $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum der Potenzmenge von M (vgl. Anhang 3), $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{R}(M)$.

Eine Menge $M' \in \mathcal{R}(M)$ mit $\mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$, die mit dieser Eigenschaft maximal in $\mathcal{R}(M)$ ist (bzg. der Inklusion), heißt Gerüst zu $\mathcal{U}$.

(1.1) Beispiel Sei $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, dann ist $\mathcal{R}(M) = \{\emptyset, \{m_1\}, \{m_2\}, \{m_3\}, \{m_1, m_2\}, \{m_1, m_3\}, \{m_2, m_3\}, M\}$. Ist $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{m_1\}, \{m_2, m_3\}, M\}$, so ist $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{R}(M)$.
 $M' = \{m_2\}$ ist ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.

Ist $M' \in \mathcal{R}(M)$ und $\mathcal{U} = \mathcal{R}(M')$, so ist $M \setminus M'$ das einzige Gerüst zu $\mathcal{U}$.

(1.2) Lemma Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. M' ist dann und nur dann Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}$, wenn $\mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$ ist.

Setzt man in (1.2) $M' = \emptyset$, so folgt, daß ein Gerüst zu $\mathcal{U}$ existiert.

(1.3) Lemma Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$, $M' \neq M$. M' ist dann und nur dann ein Gerüst zu $\mathcal{U}$, wenn es für jedes $m \in M \setminus M'$ genau ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset M' \cup \{m\}$ und $m \in U$ gibt.

Beweis: " $\Rightarrow$ "

Sei $m \in M \setminus M'$.

$M' \cup \{m\}$ enthält ein $U \in \mathcal{U}$, $U \neq \emptyset$, da sonst nach (1.2) $M' \cup \{m\}$ Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}$ und M' kein Gerüst zu $\mathcal{U}$ wäre. Ist $U \in \mathcal{U}$, $U \neq \emptyset$, mit $U \subset M' \cup \{m\}$, so ist $m \in U$, da andernfalls $U \in \mathcal{R}(M')$ und M' kein Gerüst zu $\mathcal{U}$ wäre.

Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, $U_1 \subset M' \cup \{m\}$, $m \in U_1$, $U_2 \subset M' \cup \{m\}$, $m \in U_2$. Dann ist $U_1 + U_2 \subset M' \cup \{m\}$ und $m \notin U_1 + U_2$.

Da $U_1 + U_2 \in \mathcal{U}$ und M' ein Gerüst zu $\mathcal{U}$ ist, ist $U_1 + U_2 = \emptyset$, also $U_1 = U_2$.

" $\Leftarrow$ "

Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$ ist und M' mit dieser Eigenschaft maximal in $\mathcal{R}(M)$ ist.

Sei $U \in \mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U}$. Weiter sei $m \in M \setminus M'$ und $U' \in \mathcal{U}$ mit $U' \subset M' \cup \{m\}$, $m \in U'$. U' existiert nach Voraussetzung. Dann ist $U + U' \subset M' \cup \{m\}$ und $m \in U + U'$.

Nach Voraussetzung ist $U + U' = U'$, also $U = \emptyset$.

Folglich ist $\mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$.

Ist $m \in M \setminus M'$, so ist $\mathcal{R}(M' \cup \{m\}) \cap \mathcal{U} \neq \{\emptyset\}$ nach Voraussetzung. Daraus ergibt sich, daß für $M'' \in \mathcal{R}(M)$ mit $M' \subset M''$, $M'' \neq M'$, gilt: $\mathcal{R}(M'') \cap \mathcal{U} \neq \{\emptyset\}$.

M' ist also ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.

(1.4) Lemma Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. M' enthält dann und nur dann ein Gerüst zu $\mathcal{U}$, wenn es für jedes $m \in M \setminus M'$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset M' \cup \{m\}$ und $m \in U$ gibt.

Beweis: " $\Rightarrow$ "

Ist $M' = M$, so gilt die Behauptung.

Sei $M' \neq M$ und $M'' \in \mathcal{R}(M)$, $M'' \subset M'$, ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.

Ist $m \in M \setminus M'$, so ist auch $m \in M \setminus M''$ und es existiert nach (1.3) ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset M'' \cup \{m\}$ und $m \in U$.

Aus $M'' \cup \{m\} \subset M' \cup \{m\}$ folgt die Behauptung.

" $\Leftarrow$ "

Ist $M' = M$, so enthält M' ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.

Sei $M' \neq M$ und $M'' \in \mathcal{R}(M)$, $M'' \subset M'$, eine Menge, die mit der Eigenschaft $\mathcal{R}(M'') \cap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$ maximal in

$\mathcal{R}(M')$ ist. Da $\mathcal{U} \cap \mathcal{R}(M')$ ein Unterraum von

$\mathcal{R}(M')$ ist, heißt dies, daß M'' ein Gerüst zu

$\mathcal{U} \cap \mathcal{R}(M')$ im Vektorraum $\mathcal{R}(M')$ ist. Es ist zu

zeigen, daß M'' mit der Eigenschaft $\mathcal{R}(M'') \cap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$

auch maximal in $\mathcal{R}(M)$ ist.

Sei $m \in M \setminus M'$. Nach Voraussetzung gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset M' \cup \{m\}$ und $m \in U$.

Ist $U \subset M'' \cup \{m\}$, so ist $\mathcal{R}(M'' \cup \{m\}) \cap \mathcal{U} \neq \{\emptyset\}$.

Ist $U \not\subset M'' \cup \{m\}$, so ist $U \setminus (M'' \cup \{m\}) \neq \emptyset$. Sei

$U \setminus (M'' \cup \{m\}) = \{m_1, \dots, m_n\}$. Da $m_i \in M' \setminus M''$ für $i = 1, \dots, n$ ist, gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ genau ein $U_i \in \mathcal{U}$ mit $U_i \subset M'' \cup \{m_i\}$ und $m_i \in U_i$.

Dies folgt aus (1.3), da, wie bereits bemerkt, M'' ein Gerüst zu $\mathcal{U} \cap \mathcal{R}(M')$ im Vektorraum $\mathcal{R}(M')$ ist.

Sei $U' = U + \sum_{i=1}^n U_i$, dann ist $U' \subset M'' \cup \{m\}$, da

$(\sum_{i=1}^n U_i) \setminus (M'' \cup \{m\}) = \{m_1, \dots, m_n\}$ ist. Es ist

$U' \neq \emptyset$, da wegen $m \in U$ und $m \notin \sum_{i=1}^n U_i$ gilt: $m \in U'$.

Also ist $\mathcal{R}(M'' \cup \{m\}) \cap \mathcal{U} \neq \{\emptyset\}$.

Daraus ergibt sich, daß für $M''' \in \mathcal{R}(M)$ mit

$M'' \subset M'''$, $M''' \neq M''$, gilt: $\mathcal{R}(M''') \cap \mathcal{U} \neq \{\emptyset\}$.

Daraus und aus der Definition von M'' ergibt

sich, daß $M'' \subset M'$ ein Gerüst zu $\mathcal{U}$ ist.

Wir werden nun eine Basis von $\mathcal{U}$ angeben, die durch ein Gerüst zu $\mathcal{U}$ festgelegt wird. Dabei handelt es sich um eine Verallgemeinerung des Fundamentalsystems von Zyklen bzw. Co-zyklen zu einem Gerüst bzw. Co-Gerüst in einem ungerichteten Graphen. Der Begriff stammt von G.Kirchhoff ([15]).

(1.5) Satz Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$, $M' \neq M$, ein Gerüst zu $\mathcal{U}$. Die Menge

$\mathcal{F}(\mathcal{U}, M') = \{U \in \mathcal{U} \mid U \subset M' \cup \{m\}, m \in U \text{ für ein } m \in M \setminus M'\}$

ist eine Basis von $\mathcal{U}$.

Beweis: (i) Nach (1.3) enthält jedes $U \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$ ein

Element, das in keinem anderen $U' \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$

enthalten ist. Weiter ist $\mathcal{F}(\mathcal{U}, M') \neq \emptyset$

wegen (1.3), da nach Voraussetzung $M' \neq M$

ist. $\mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$ ist linear unabhängig.

(ii) Sei $U \in \mathcal{U}$.

$U = \emptyset$ ist Linearkombination von Elementen von $\mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$.

Sei $U \neq \emptyset$. Dann ist $U \cap (M \setminus M') \neq \emptyset$, da andernfalls $U \in \mathcal{R}(M')$ wäre. Sei $U \cap (M \setminus M') =$

$\{m_1, \dots, m_n\}$, $U_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$ mit $U_i \subset M' \cup \{m_i\}$ und $m_i \in U_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$U + \sum_{i=1}^n U_i \subset M', \text{ da } \left(\sum_{i=1}^n U_i \right) \cap (M \setminus M') = \{m_1, \dots, m_n\}$$

$$\text{ist, also } U + \sum_{i=1}^n U_i = \emptyset \text{ und } U = \sum_{i=1}^n U_i.$$

$\mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$ erzeugt also $\mathcal{U}$.

Sei $f: \mathcal{F}(\mathcal{U}, M') \rightarrow \mathcal{R}(M \setminus M')$ eine Abbildung, definiert durch

$f(U) = \{m\}$, wenn $U \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$ ist und für $m \in M \setminus M'$ gilt:

$U \subset M' \cup \{m\}$ und $m \in U$. Die lineare Fortsetzung von f auf $\mathcal{U}$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{R}(M \setminus M')$.

Aus (1.5) ergibt sich unmittelbar, daß alle Gerüste zu $\mathcal{U}$ die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.

(1.6) Lemma Ist $M' \in \mathcal{R}(M)$ ein Gerüst zu $\mathcal{U}$, so gilt:

$$|M'| = |M| - \dim \mathcal{U}$$

$$= \dim \mathcal{R}(M) - \dim \mathcal{U}.$$

(1.7) Beispiel Seien M , $\mathcal{U}$ und M' wie in (1.1).

$$\text{Dann ist } \mathcal{F}(\mathcal{U}, M') = \{\{m_1\}, \{m_2, m_3\}\}.$$

Ist $f: \mathcal{F}(\mathcal{U}, M') \rightarrow \mathcal{R}(M \setminus M')$ definiert durch

$$f(\{m_1\}) = \{m_1\}, \quad f(\{m_2, m_3\}) = \{m_3\},$$

so ist die lineare Fortsetzung von f auf $\mathcal{U}$ ein Isomor-

phismus von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{R}(M \setminus M')$.

$$\text{Es ist } |M'| = |M| - \dim \mathcal{U} = 1.$$

(1.8) Lemma Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. M' enthält dann und nur dann ein Gerüst zu $\mathcal{U}$, wenn $\mathcal{R}(M) = \mathcal{R}(M') + \mathcal{U}$ ist.

Beweis: " $\Rightarrow$ "

Es ist zu zeigen, daß jedes Element von $\mathcal{B}_M$ Summe von Elementen von $\mathcal{R}(M')$ und $\mathcal{U}$ ist. (Zur Definition von $\mathcal{B}_M$ s. Anhang 3.)

Sei $m \in M$.

Ist $m \in M'$, so ist $\{m\} = \{m\} + \emptyset$.

Ist $m \in M \setminus M'$, so gibt es nach (1.4) ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset M' \cup \{m\}$ und $m \in U$. Dann ist $U + \{m\} \in \mathcal{R}(M')$ und $\{m\} = (U + \{m\}) + U$.

" $\Leftarrow$ "

Sei $m \in M \setminus M'$. Dann gibt es ein $M'' \in \mathcal{R}(M')$ und ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\{m\} = M'' + U$. Da $m \notin M''$ ist, gilt $m \in U$. Weiter ist $U = M'' + \{m\}$, also $U \subset M' \cup \{m\}$.

Nach (1.4) enthält M' ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.

Aus (1.2) und (1.8) ergibt sich:

(1.9) Satz Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. M' ist dann und nur dann ein Gerüst zu $\mathcal{U}$, wenn $\mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$ und $\mathcal{R}(M) = \mathcal{R}(M') + \mathcal{U}$ ist.

(1.9) besagt, daß $M' \in \mathcal{R}(M)$ dann und nur dann ein Gerüst zu $\mathcal{U}$ ist, wenn $\mathcal{R}(M)$ die direkte Summe von $\mathcal{R}(M')$ und $\mathcal{U}$ ist.

Sei $\mathcal{R}(M)/\mathcal{U}$ der Faktorraum von $\mathcal{R}(M)$ nach $\mathcal{U}$, $v: \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(M)/\mathcal{U}$ der natürliche Homomorphismus. Dann ist $v(M') = v(M'')$ für $M', M'' \in \mathcal{R}(M)$ dann und nur dann, wenn $M' + M'' \in \mathcal{U}$ ist.

Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$ und $\mathcal{R}(M)/\mathcal{R}(M')$ der Faktorraum von $\mathcal{R}(M)$ nach $\mathcal{R}(M')$, $\mu: \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(M)/\mathcal{R}(M')$ der natürliche Homomorphismus.

Dann ist $\mu(M'') = \mu(M''')$ für $M'', M''' \in \mathcal{R}(M)$ dann und nur dann, wenn $M'' + M''' \in \mathcal{R}(M')$ ist.

(1.10) Lemma Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. Dann sind äquivalent:

- (i) M' ist Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}$.
- (ii) $\nu|_{\mathcal{R}(M')}: \mathcal{R}(M') \rightarrow \mathcal{R}(M)/\mathcal{U}$ ist injektiv.
- (iii) $\mu|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}(M)/\mathcal{R}(M')$ ist injektiv.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Nach (1.2) ist $\mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$. Seien $M'', M''' \in \mathcal{R}(M')$ mit $\nu(M'') = \nu(M''')$. Dann ist $M'' + M''' \in \mathcal{U}$, also $M'' + M''' = \emptyset$ und $M'' = M'''$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $M'' \in \mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U}$, so ist $M'' + \emptyset = M'' \in \mathcal{U}$ und $\nu(M'') = \nu(\emptyset)$, also $M'' = \emptyset$. Nach (1.2) ist M' Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}$.

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Nach (1.2) ist $\mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U} = \{\emptyset\}$. Seien $U, U' \in \mathcal{U}$ mit $\mu(U) = \mu(U')$. Dann ist $U + U' \in \mathcal{R}(M')$, also $U + U' = \emptyset$ und $U = U'$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $U \in \mathcal{R}(M') \cap \mathcal{U}$, so ist $U + \emptyset = U \in \mathcal{R}(M')$ und $\mu(U) = \mu(\emptyset)$, also $U = \emptyset$. Nach (1.2) ist M' Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}$.

(1.11) Lemma Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. Dann sind äquivalent:

- (i) M' enthält ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.
- (ii) $\nu|_{\mathcal{R}(M')}: \mathcal{R}(M') \rightarrow \mathcal{R}(M)/\mathcal{U}$ ist surjektiv.
- (iii) $\mu|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}(M)/\mathcal{R}(M')$ ist surjektiv.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $M'' \in \mathcal{R}(M)$. Nach (1.8) gibt es ein $M''' \in \mathcal{R}(M')$

und ein $U \in \mathcal{U}$ mit $M'' = M''' + U$. Dann ist $M'' + M''' \in \mathcal{U}$, also $\vee(M'') = \vee(M''')$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $M'' \in \mathcal{R}(M)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $M''' \in \mathcal{R}(M')$ mit $\vee(M'') = \vee(M''')$. Dann ist $M'' + M''' \in \mathcal{U}$ und es ist $M'' = M''' + (M'' + M''')$. Also ist $\mathcal{R}(M) = \mathcal{R}(M') + \mathcal{U}$ und nach (1.8) enthält M' ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Sei $M'' \in \mathcal{R}(M)$. Nach (1.8) gibt es ein $M''' \in \mathcal{R}(M')$ und ein $U \in \mathcal{U}$ mit $M'' = M''' + U$. Dann ist $M'' + U \in \mathcal{R}(M')$, also $\mu(M'') = \mu(U)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $M'' \in \mathcal{R}(M)$. Nach Voraussetzung gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\mu(M'') = \mu(U)$. Dann ist $M'' + U \in \mathcal{R}(M')$ und es ist $M'' = (M'' + U) + U$. Also ist $\mathcal{R}(M) = \mathcal{R}(M') + \mathcal{U}$ und nach (1.8) enthält M' ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.

Aus (1.10) und (1.11) ergibt sich unmittelbar:

(1.12) Satz Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. Dann sind äquivalent:

(i) M' ist ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.

(ii) $\vee | \mathcal{R}(M') : \mathcal{R}(M') \rightarrow \mathcal{R}(M)/\mathcal{U}$ ist ein Isomorphismus.

(iii) $\mu | \mathcal{U} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}(M)/\mathcal{R}(M')$ ist ein Isomorphismus.

(1.13) Beispiel (i) Seien M und $\mathcal{U}$ wie in (1.1).

Dann ist $\mathcal{R}(M)/\mathcal{U} = \{[\emptyset], [\{m_2\}]\}$ und

$$[\emptyset] = \{\emptyset, \{m_1\}, \{m_2, m_3\}, M\},$$

$$[\{m_2\}] = \{\{m_2\}, \{m_3\}, \{m_1, m_2\}, \{m_1, m_3\}\}.$$

Für $M' \in \mathcal{R}(M)$ ist $\nu|_{\mathcal{R}(M')}$ dann und nur dann injektiv, wenn $M' \subset \{m_2\}$ oder $M' \subset \{m_3\}$ ist. $\nu|_{\mathcal{R}(M')}$ ist dann und nur dann surjektiv, wenn $m_2 \in M'$ oder $m_3 \in M'$ ist.

(ii) Seien M und $\mathcal{U}$ wie in (1.1).

Sei $M' = \{m_1, m_2\}$. Dann ist $\mathcal{R}(M)/\mathcal{R}(M') =$

$$\{[\emptyset], [\{m_3\}]\} \text{ und}$$

$$[\emptyset] = \{\emptyset, \{m_1\}, \{m_2\}, \{m_1, m_2\}\},$$

$$[\{m_3\}] = \{\{m_3\}, \{m_1, m_3\}, \{m_2, m_3\}, M\}.$$

$\mu|_{\mathcal{U}}$ ist surjektiv.

(iii) Sei M wie in (1.1), $\mathcal{U}' = \{\emptyset, \{m_2, m_3\}\}$.

$\mathcal{U}'$ ist ein Unterraum von $\mathcal{R}(M)$. Sei

$M' = \{m_1\}$. Dann ist $\mathcal{R}(M)/\mathcal{R}(M') =$

$$\{[\emptyset], [\{m_2\}], [\{m_3\}], [\{m_2, m_3\}]\} \text{ und}$$

$$[\emptyset] = \{\emptyset, \{m_1\}\}, [\{m_2\}] = \{\{m_2\}, \{m_1, m_2\}\},$$

$$[\{m_3\}] = \{\{m_3\}, \{m_1, m_3\}\}, [\{m_2, m_3\}] =$$

$$\{\{m_2, m_3\}, M\}. \mu|_{\mathcal{U}'} \text{ ist injektiv.}$$

$\{m_1, m_2\}$ ist ein Gerüst zu $\mathcal{U}'$.

Im Folgenden sei $\mathcal{R}(M)$ mit dem Standard-Produkt bezüglich der Basis $\mathcal{B}_M$ versehen, $\mathcal{U}^\perp$ der zu $\mathcal{U}$ orthogonale Unterraum von $\mathcal{R}(M)$ (s. Anhang 1).

(1.14) Satz Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. M' ist dann und nur dann ein Gerüst zu $\mathcal{U}$, wenn $M \setminus M'$ ein Gerüst zu $\mathcal{U}^\perp$ ist.

Beweis: " $\Rightarrow$ "

Ist $\mathcal{R}(M \setminus M') \cap \mathcal{U}^\perp \neq \{\emptyset\}$, so gibt es ein

$M'' \in \mathcal{R}(M \setminus M') \cap \mathcal{U}^\perp$ mit $M'' \neq \emptyset$. Sei $m \in M''$,

$U \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$ mit $U \subset M' \cup \{m\}$, $m \in U$. Dann ist

$|M'' \cap U| = |\{m\}| = 1$, was wegen $\langle M'', U \rangle \equiv |M'' \cap U|$

(mod. 2) und nach Definition von $\mathcal{U}^\perp$ nicht

möglich ist. Also ist $\mathcal{R}(M \setminus M') \cap \mathcal{U}^\perp = \{\emptyset\}$. Nach

(1.2) ist $M \setminus M'$ Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}^\perp$.

Weiter ist $|M \setminus M'| = |M| - |M'|$

$$= |M| - (\dim \mathcal{R}(M) - \dim \mathcal{U})$$

$$= |M| - \dim \mathcal{U}^\perp \text{ nach (A3),}$$

Anhang 1. Aus (1.6) ergibt sich, daß $M \setminus M'$ ein Gerüst zu $\mathcal{U}^\perp$ ist.

" $\Leftarrow$ "

Ist $M \setminus M'$ ein Gerüst zu $\mathcal{U}^\perp$, so ist nach dem

bereits Bewiesenen $M \setminus (M \setminus M') = M'$ ein Gerüst zu

$(\mathcal{U}^\perp)^\perp$. Nach (A4), Anhang 1, ist $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$.

Der folgende Satz, der sich unmittelbar aus (1.14) ergibt, zeigt, daß der Begriff des Gerüsts zu $\mathcal{U}$ mit dem des "arbre associé à $\mathcal{U}^\perp$ " von A.Ghouila-Houri ([11]) übereinstimmt (vgl. Vorwort).

(1.15) Satz Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. M' ist dann und nur dann ein Gerüst zu $\mathcal{U}$, wenn M' mit der Eigenschaft $\mathcal{R}(M \setminus M') \cap \mathcal{U}^\perp = \{\emptyset\}$ minimal in $\mathcal{R}(M)$ ist.

(1.16) Beispiel Seien M , $\mathcal{U}$ und M' wie in (1.1).

Dann ist $\mathcal{U}^\perp = \{\emptyset, \{m_2, m_3\}\}$.

$M \setminus M' = \{m_1, m_3\}$ ist ein Gerüst zu $\mathcal{U}^\perp$.

(1.17) Satz Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$ ein Gerüst zu $\mathcal{U}$. Für $m \in M \setminus M'$ sei $U(m) \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$ mit $U(m) \subset M' \cup \{m\}$ und $m \in U(m)$, für $m' \in M'$ sei $V(m') \in \mathcal{F}(\mathcal{U}^\perp, M \setminus M')$ mit $V(m') \subset (M \setminus M') \cup \{m'\}$ und $m' \in V(m')$. Dann gilt für alle $m \in M \setminus M'$ und $m' \in M'$:
 $m' \in U(m)$ dann und nur dann, wenn $m \in V(m')$ ist.

Beweis: Sei $m \in M \setminus M'$, $m' \in M'$. Da $U(m) \subset M' \cup \{m\}$ und $V(m') \subset (M \setminus M') \cup \{m'\}$ ist, gilt $U(m) \cap V(m') \subset \{m, m'\}$. Wegen $m \neq m'$ und $U(m) \in \mathcal{U}$, $V(m') \in \mathcal{U}^\perp$ ist $U(m) \cap V(m') = \{m, m'\}$ oder $U(m) \cap V(m') = \emptyset$, da $\langle U(m), V(m') \rangle \equiv |U(m) \cap V(m')| \pmod{2}$ ist, also $|U(m) \cap V(m')|$ gerade ist.

(1.18) Beispiel Seien M , $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^\perp$ und M' wie in (1.1) und (1.16).

Es gilt: $m_2 \notin U(m_1)$ und $m_1 \notin V(m_2)$,
 $m_2 \in U(m_3)$ und $m_3 \in V(m_2)$.

Eine Menge $U \in \mathcal{U}$ heißt elementar, wenn sie minimal in $\mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}$ ist (bzg. der Inklusion). Diese Begriffsbildung ist eine Verallgemeinerung der Begriffe elementarer Zyklus und elementarer Cozyklus, da, wie bereits bemerkt, die Menge der Zyklen und die Menge der Cozyklen in einem ungerichteten Graphen Unterräume des Vektorraums der Potenzmenge der Kantenmenge sind.

(1.19) Beispiel Seien M und $\mathcal{U}$ wie in (1.1).

$\{m_1\}$ und $\{m_2, m_3\}$ sind elementare Elemente von $\mathcal{U}$.

(1.20) Lemma Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$ ein Gerüst zu $\mathcal{U}$. Dann sind alle Elemente von $\mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$ elementare Elemente von $\mathcal{U}$.

Beweis: Sei $U \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, M')$, $m \in M \setminus M'$ mit $U \subset M' \cup \{m\}$ und $m \in U$. Ist U nicht elementar, so gibt es ein $U' \in \mathcal{U}$, $U' \neq \emptyset$, $U' \subset U$, $U' \neq U$, da $U \neq \emptyset$ ist. Ist $m \in U'$, so ist $m \notin U + U'$. Dann ist $U + U' \subset M'$, was wegen $U + U' \neq \emptyset$ nicht möglich ist. Ist $m \notin U'$, so ist $U' \subset M'$, was wegen $U' \neq \emptyset$ nicht möglich ist.

Also ist U ein elementares Element von $\mathcal{U}$.

Aus (1.20) ergibt sich, daß die Menge der elementaren Elemente von $\mathcal{U}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$ ist. Jedoch ist die Menge der elementaren Elemente von $\mathcal{U}$ i.A. keine Basis, wie folgendes Beispiel zeigt.

(1.21) Beispiel Sei M wie in (1.1).

$\mathcal{U}' := \{\emptyset, \{m_1, m_2\}, \{m_1, m_3\}, \{m_2, m_3\}\}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{R}(M)$. Die Elemente $\{m_1, m_2\}$, $\{m_1, m_3\}$ und $\{m_2, m_3\}$ sind elementar und es ist $\{m_1, m_2\} + \{m_1, m_3\} + \{m_2, m_3\} = \emptyset$.

Der folgende Satz ist die Verallgemeinerung eines in der Graphentheorie bekannten Satzes zur Charakterisierung von Gerüsten bzw. Co-Gerüsten in einem ungerichteten Graphen. In der Formulierung ist der Satz an G.de Ghellinck, [10] orientiert.

(1.22) Satz Sei $M' \in \mathcal{R}(M)$. Dann sind äquivalent:

- (i) M' ist ein Gerüst zu $\mathcal{U}$.
- (ii) M' enthält kein elementares $U \in \mathcal{U}$ und $M \setminus M'$ enthält kein elementares $V \in \mathcal{U}^\perp$.
- (iii) M' enthält kein elementares $U \in \mathcal{U}$ und es ist $|M'| = |M| - \dim \mathcal{U}$.

- (iv) $M \setminus M'$ enthält kein elementares $V \in \mathcal{U}^\perp$ und es ist $|M'| = |M| - \dim \mathcal{U}$.
- (v) M' enthält kein elementares $U \in \mathcal{U}$; ist aber $m \in M \setminus M'$, so gibt es ein elementares $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset M' \cup \{m\}$ und $m \in U$.
- (vi) $M \setminus M'$ enthält kein elementares $V \in \mathcal{U}^\perp$; ist aber $m \in M'$, so gibt es ein elementares $V \in \mathcal{U}^\perp$ mit $V \subset (M \setminus M') \cup \{m\}$ und $m \in V$.

Beweis: Es gilt:

- (i) $\Leftrightarrow M'$ ist Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}$ und $M \setminus M'$ ist Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}^\perp$. (nach (1.2))
- (ii) $\Leftrightarrow M'$ ist Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}$ und es ist $|M'| = |M| - \dim \mathcal{U}$. (nach (1.2))
- (iv) $\Leftrightarrow M \setminus M'$ ist Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}^\perp$ und es ist $|M \setminus M'| = |M| - \dim \mathcal{U}^\perp$. (nach (1.2))
- (v) $\Leftrightarrow M'$ ist Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}$ und M' enthält ein Gerüst zu $\mathcal{U}$. (nach (1.2) und (1.4))
- (vi) $\Leftrightarrow M \setminus M'$ ist Teilmenge eines Gerüsts zu $\mathcal{U}^\perp$ und $M \setminus M'$ enthält ein Gerüst zu $\mathcal{U}^\perp$. (nach (1.2) und (1.4))

Aus (1.14) und (1.6) folgt die Behauptung.

Die folgenden Sätze sind Verallgemeinerungen von Sätzen, die in der Graphentheorie für elementare Zyklen und elementäre Cozyklen in einem ungerichteten Graphen bekannt sind. (1.26)

wurde von H. Whitney ([21]) für Matroide bewiesen.

(1.23) Satz Sei $m \in M$. Es gibt dann und nur dann ein elementares $U \in \mathcal{U}$ mit $m \in U$, wenn $\{m\} \notin \mathcal{U}^\perp$ ist.

Beweis: Ist $U \in \mathcal{U}$ elementar und $m \in U$, so ist $\langle U, \{m\} \rangle = 1$ und folglich $\{m\} \notin \mathcal{U}^\perp$.

Ist $\{m\} \notin \mathcal{U}^\perp$, so gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\langle U, \{m\} \rangle = 1$, also $m \in U$. U ist Summe elementarer Elemente von $\mathcal{U}$. Es gibt also ein elementares $U' \in \mathcal{U}$ mit $m \in U'$.

(1.24) Beispiel Seien M , $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^\perp$ wie in (1.1) und (1.16).

Dann ist $m_1 \in \{m_1\} \in \mathcal{U}$ und $\{m_1\} \notin \mathcal{U}^\perp$,

$m_2 \in \{m_2, m_3\} \in \mathcal{U}$ und $\{m_2\} \notin \mathcal{U}^\perp$,

$m_3 \in \{m_2, m_3\} \in \mathcal{U}$ und $\{m_3\} \notin \mathcal{U}^\perp$.

Weiter ist $\{m_1\} \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ und $m_1 \notin V$ für ein elementares $V \in \mathcal{U}^\perp$,

$\{m_2\} \notin (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ und $m_2 \in \{m_2, m_3\} \in \mathcal{U}^\perp$,

$\{m_3\} \notin (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ und $m_3 \in \{m_2, m_3\} \in \mathcal{U}^\perp$.

(1.25) Satz Sei $U \in \mathcal{R}(M)$. U ist dann und nur dann ein elementares Element von $\mathcal{U}$, wenn für jedes Gerüst

$M' \in \mathcal{R}(M)$ zu $\mathcal{U}$ gilt: U ist nicht Teilmenge von M' und wenn U mit dieser Eigenschaft minimal in $\mathcal{R}(M)$ ist.

Beweis: " $\Leftarrow$:"

Ist $U \notin \mathcal{R}(M')$ für jedes Gerüst $M' \in \mathcal{R}(M)$ zu $\mathcal{U}$, so ist nach (1.2) $\mathcal{R}(U) \cap \mathcal{U} \neq \{\emptyset\}$. Sei $U' \in \mathcal{R}(U) \cap \mathcal{U}$.

Ist $U' \neq U$, so gibt es nach Voraussetzung ein Gerüst $M'' \in \mathcal{R}(M)$ zu $\mathcal{U}$ mit $U' \subset M''$. Dann ist $U' = \emptyset$, also ist $U \in \mathcal{U}$ und U ist elementar.

" $\Rightarrow$ "

Ist $U \in \mathcal{U}$ elementar, so ist $U \notin \mathcal{R}(M')$ für jedes Gerüst $M' \in \mathcal{R}(M)$ zu $\mathcal{U}$. Die Minimalitätsbedingung folgt aus der bereits bewiesenen Implikation.

Aus (1.25) und (1.14) folgt:

(1.26) Satz Sei $U \in \mathcal{R}(M)$. U ist dann und nur dann ein elementares Element von $\mathcal{U}$, wenn für jedes Gerüst $M' \in \mathcal{R}(M)$ zu $\mathcal{U}^\perp$ gilt: $M' \cap U \neq \emptyset$ und wenn U mit dieser Eigenschaft minimal in $\mathcal{R}(M)$ ist.

(1.27) Beispiel Seien M , $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^\perp$ wie in (1.1) und (1.16).

Dann sind $\{m_1, m_2\}$ und $\{m_1, m_3\}$ die Gerüste zu $\mathcal{U}^\perp$. $\{m_1\}$ und $\{m_2, m_3\}$ haben mit diesen Gerüsten einen nichtleeren Durchschnitt und sind mit dieser Eigenschaft minimal in $\mathcal{R}(M)$.

Nach (1.19) sind sie auch die elementaren Elemente von $\mathcal{U}$.

2. Zyklen und Cozyklen

In diesem Teil werden Definitionen und Sätze von Zyklen und Cozyklen in ungerichteten Graphen auf Hypergraphen verallgemeinert. Wir halten uns dabei im wesentlichen an die Definition, die C. Berge für Hypergraphen gegeben hat ([4], S. 373). Zyklen und Cozyklen werden durch den Rand- bzw. Corandoperator definiert. Dann charakterisieren wir Zyklen und Cozyklen durch die Anzahl von Kanten, die mit Ecken inzident sind, sowie durch das von der Inzidenzmatrix bestimmte binäre lineare Gleichungssystem. Schließlich werden Büschel, EULER-Graphen und paare Graphen verallgemeinert.

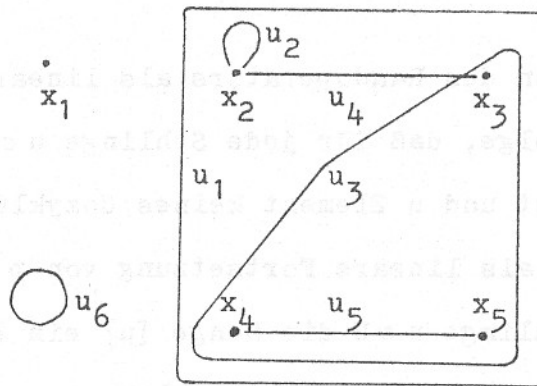
Seien X und U endliche Mengen, $p: U \rightarrow \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung. Dann heißt $H = (X, U, p)$ Hypergraph. Die Elemente von X heißen Ecken, die Elemente von U Kanten. Eine Ecke $x \in X$ und eine Kante $u \in U$ heißen inzident, wenn $x \in p(u)$ ist. Eine Kante $u \in U$, für die die Menge $p(u)$ einelementig ist, heißt Schlinge. Die hier gegebene Definition des Hypergraphen ist allgemeiner als die von C. Berge gegebene ([4]). Es wird $p(u) = \emptyset$ für $u \in U$ nicht ausgeschlossen und es wird nicht gefordert, daß

$$\bigcup_{u \in U} p(u) = X \text{ ist.}$$

(2.1) Beispiel Sei $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$,
 $p: U \rightarrow \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung, definiert durch
 $p(u_1) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $p(u_2) = \{x_2\}$,
 $p(u_3) = \{x_3, x_4, x_5\}$, $p(u_4) = \{x_2, x_3\}$,
 $p(u_5) = \{x_4, x_5\}$, $p(u_6) = \emptyset$.

$H = (X, U, p)$ ist ein Hypergraph.

H wird folgendermaßen dargestellt:



Sei $p' : U \rightarrow \mathcal{R}(X)$ definiert durch $p'(u) = \emptyset$, falls $u \in U$ eine Schlinge ist, und durch $p'(u) = p(u)$ für alle anderen $u \in U$. p' kann als Abbildung von $\mathcal{B}_U$ in $\mathcal{R}(X)$ aufgefaßt werden. Die lineare Fortsetzung von p' auf $\mathcal{R}(U)$ heißt Randoperator und wird mit f bezeichnet. Da f ein Homomorphismus von $\mathcal{R}(U)$ in $\mathcal{R}(X)$ ist, ist Kern f ein Unterraum von $\mathcal{R}(U)$. Die Elemente von Kern f heißen Zyklen, und es sei $\mathcal{Z} := \text{Kern } f$. In Übereinstimmung mit der Begriffsbildung in ungerichteten Graphen nennen wir ein Gerüst zu $\mathcal{Z}$ Gerüst von H.

Die zu f adjungierte Abbildung $f' \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{R}(X), \mathcal{R}(U))$ heißt Corandoperator. Die Existenz des Corandoperators ergibt sich nach (A8), Anhang 2. Bild f' ist ein Unterraum von $\mathcal{R}(U)$. Die Elemente von Bild f' heißen Cozyklen, und es sei $\mathcal{C} := \text{Bild } f'$. In Übereinstimmung mit der Begriffsbildung in ungerichteten Graphen nennen wir ein Gerüst zu $\mathcal{C}$ Co-Gerüst von H.

Nach (A7), Anhang 2, sind $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{C}$ zueinander orthogonale Unterräume von $\mathcal{R}(U)$. Somit sind die Ergebnisse des ersten Teils auf $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}^\perp = \mathcal{C}$ sowie auf $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^\perp = \mathcal{Z}$ anwendbar.

Dies gilt insbesondere für die elementaren Elemente von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{C}$, die wir elementare Zyklen bzw. elementare Cozyklen nennen.

Die Definition des Randoperators als lineare Fortsetzung von p' hat zur Folge, daß für jede Schlinge $u \in U$ die Menge $\{u\}$ ein Zyklus ist und u Element keines Cozyklus ist. Wäre der Randoperator als lineare Fortsetzung von p definiert, so wäre für keine Schlinge $u \in U$ die Menge $\{u\}$ ein Zyklus und jede Schlinge wäre Element eines Cozyklus.

(2.2) Beispiel Sei $H = (X, U, p)$ wie in (2.1).

Es ist $f(\{u_1\}) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $f(\{u_2\}) = \emptyset$,

$f(\{u_3\}) = \{x_3, x_4, x_5\}$, $f(\{u_4\}) = \{x_2, x_3\}$,

$f(\{u_5\}) = \{x_4, x_5\}$, $f(\{u_6\}) = \emptyset$.

Daraus ergibt sich:

$$\mathcal{Z} = \{\emptyset, \{u_2\}, \{u_6\}, \{u_1, u_4, u_5\}, \{u_2, u_6\}, \{u_1, u_2, u_4, u_5\}, \\ \{u_1, u_4, u_5, u_6\}, \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6\}\}.$$

Elementare Zyklen sind: $\{u_2\}, \{u_6\}, \{u_1, u_4, u_5\}$.

Weiter ist $f'(\{x_1\}) = \emptyset$, $f'(\{x_2\}) = \{u_1, u_4\}$,

$f'(\{x_3\}) = \{u_1, u_3, u_4\}$, $f'(\{x_4\}) = \{u_1, u_3, u_5\}$,

$f'(\{x_5\}) = \{u_1, u_3, u_5\}$.

Daraus ergibt sich:

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \{u_1, u_4\}, \{u_1, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\}, \{u_3\}, \\ \{u_3, u_4, u_5\}, \{u_4, u_5\}, \{u_1, u_5\}\}.$$

Elementare Cozyklen sind: $\{u_3\}, \{u_1, u_4\}, \{u_1, u_5\}, \\ \{u_4, u_5\}$.

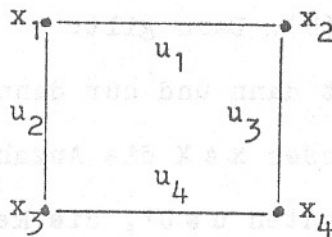
$U' = \{u_1, u_3, u_4\}$ ist ein Gerüst von H . Dann ist

$\mathcal{F}(\mathcal{Z}, U') = \{\{u_2\}, \{u_1, u_4, u_5\}, \{u_6\}\}$ eine Basis von $\mathcal{Z}$.

$U \setminus U' = \{u_2, u_5, u_6\}$ ist ein Co-Gerüst von H . Dann ist $\mathcal{F}(\mathcal{C}, U \setminus U') = \{\{u_1, u_5\}, \{u_3\}, \{u_4, u_5\}\}$ eine Basis von $\mathcal{C}$.

In (2.2) ist $\mathcal{Z} \cap \mathcal{C} = \{\emptyset\}$, und somit ist $\mathcal{R}(U)$ direkte Summe von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{C}$. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt.

(2.3) Beispiel Sei $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,
 $p: U \rightarrow \mathcal{R}(X)$ eine Abbildung, definiert durch
 $p(u_1) = \{x_1, x_2\}$, $p(u_2) = \{x_1, x_3\}$, $p(u_3) = \{x_2, x_4\}$,
 $p(u_4) = \{x_3, x_4\}$.
 $H = (X, U, p)$ ist ein Hypergraph.



Es ist $\mathcal{Z} = \{\emptyset, U\}$ und $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_1, u_4\}, \{u_2, u_3\}, \{u_2, u_4\}, \{u_3, u_4\}, U\}$.

(2.4) Lemma Seien $U' \in \mathcal{R}(U)$, $X' \in \mathcal{R}(X)$, $u \in U$, $x \in X$. Dann gilt:

- (i) $x \in f(U')$ dann und nur dann, wenn die Anzahl der $u \in U'$ mit $x \in p'(u)$ ungerade ist.
- (ii) $u \in f'(X')$ dann und nur dann, wenn die Anzahl der $x \in X'$ mit $x \in p'(u)$ ungerade ist.

Beweis: (i) Nach Definition von f ist

$$\begin{aligned} f(U') &= f\left(\sum_{u \in U'} \{u\}\right) \\ &= \sum_{u \in U'} f(\{u\}) \\ &= \sum_{u \in U'} p'(u) \end{aligned}$$

$$= \{x \in X \mid |\{u \in U' \mid x \in p'(u)\}| \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

(ii) Nach Definition von f' und (A8), Anhang 2,

gilt:

$$\begin{aligned} f'(X') &= f'(\sum_{x \in X'} \{x\}) \\ &= \sum_{x \in X'} \sum_{u \in U} \langle f(\{u\}), \{x\} \rangle \mathcal{R}(X) \cdot \{u\} \\ &= \sum_{x \in X'} \sum_{u \in U} \langle p'(u), \{x\} \rangle \mathcal{R}(X) \cdot \{u\} \\ &= \sum_{x \in X'} \{u \in U \mid x \in p'(u)\} \\ &= \{u \in U \mid |\{x \in X' \mid x \in p(u)\}| \equiv 1 \pmod{2}\}. \end{aligned}$$

Aus der Definition von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{C}$ sowie aus (2.4) folgt:

(2.5) Satz Sei $U' \in \mathcal{R}(U)$. Dann gilt:

(i) U' ist dann und nur dann ein Zyklus, wenn für jedes $x \in X$ die Anzahl der mit x inzidenten Kanten $u \in U'$, die keine Schlingen sind, gerade ist.

(ii) U' ist dann und nur dann ein Cozyklus, wenn es ein $X' \in \mathcal{R}(X)$ gibt, so daß gilt:

$u \in U'$ dann und nur dann, wenn $u \in U$ keine Schlinge ist und die Anzahl der mit u inzidenten Ecken $x \in X'$ ungerade ist.

Sei $m \approx |X|$, $n \approx |U|$. X und U seien auf beliebige Art geordnet,

also $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Dann ist

$\mathcal{B}_X = \{\{x_i\} \mid x_i \in X, 1 \leq i \leq m\}$ und $\mathcal{B}_U = \{\{u_j\} \mid u_j \in U, 1 \leq j \leq n\}$. Bezüg-

lich dieser Basen sind $\mathcal{R}(X)$ und $\mathcal{R}(U)$ auf kanonische Art

isomorph zu $\mathbb{Z}_2^m$ bzw. zu $\mathbb{Z}_2^n$. Die kanonischen Isomorphismen

sind durch

$$X' \mapsto \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \text{ für } X' \in \mathcal{R}(X), X' = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \{x_i\}, \alpha_i \in \mathbb{Z}_2,$$

bzw.

$$U' \mapsto \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ für } U' \in \mathcal{R}(U), U' = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \{u_j\}, \beta_j \in \mathbb{Z}_2,$$

definiert.

Für $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ sei $d_{ij} \in \mathbb{Z}_2$ definiert durch

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i \in p'(u_j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad d_{ij} \text{ heißt } \underline{\text{Grad von } x_i \text{ in } u_j}.$$

Dem Randoperator entspricht die Abbildung $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2^n, \mathbb{Z}_2^m)$, definiert durch

$$\bar{f}(\beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot d_{ij} \text{ für alle } i=1, \dots, m, \text{ für}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^n.$$

Dem Corandoperator entspricht die Abbildung $\bar{f}' \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2^m, \mathbb{Z}_2^n)$, definiert durch

$$\bar{f}'(\alpha) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ mit } \beta_j = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot d_{ij} \text{ für alle } j=1, \dots, n, \text{ für}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^m.$$

Die $m \times n$ -Matrix $I = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix}$ heißt Inzidenzmatrix von H .

Aus der Definition von $\bar{f}$ und $\bar{f}'$ ergibt sich unmittelbar, daß für $\beta \in \mathbb{Z}_2^n$ gilt: $\bar{f}(\beta) = I \cdot \beta$, und daß für $\alpha \in \mathbb{Z}_2^m$ gilt: $\bar{f}'(\alpha) = I' \cdot \alpha$, wobei I' die zu I transponierte Matrix ist.

(2.6) Satz Sei $U' \in \mathcal{R}(U)$, $U' = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \{u_j\}$, $\beta_j \in \mathbb{Z}_2$.

Dann gilt:

(i) U' ist dann und nur dann ein Zyklus, wenn

$$\beta' = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ eine Lösung des binären homogenen}$$

linearen Gleichungssystems $I \cdot \beta = 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_2^n$, ist.

(ii) U' ist dann und nur dann ein Cozyklus, wenn

das binäre lineare Gleichungssystem $I' \cdot \alpha = \beta$,
 $\alpha \in \mathbb{Z}_2^m$, $\beta \in \mathbb{Z}_2^n$, lösbar ist für $\beta' = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

(2.7) Beispiel Sei $H = (X, U, p)$ wie in (2.1) und (2.2).

Dann ist $\mathcal{R}(X) \cong \mathbb{Z}_2^5$, $\mathcal{R}(U) \cong \mathbb{Z}_2^6$ und

$$I = \begin{pmatrix} 000000 \\ 100100 \\ 101100 \\ 101010 \\ 101010 \end{pmatrix}, \quad I' = \begin{pmatrix} 01111 \\ 00000 \\ 00111 \\ 01100 \\ 00011 \\ 00000 \end{pmatrix}.$$

Sei $U' \in \mathcal{R}(U)$, $U' = \sum_{j=1}^6 \beta_j \cdot \{u_j\}$.

U' ist dann und nur dann ein Zyklus, wenn gilt:

$$\beta_1 + \beta_4 = 0$$

$$\beta_1 + \beta_3 + \beta_4 = 0$$

$$\beta_1 + \beta_3 + \beta_5 = 0,$$

d.h. wenn gilt: $\beta_1 = \beta_4 = \beta_5$, $\beta_3 = 0$.

U' ist dann und nur dann ein Cozyklus, wenn

es ein $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^5$ gibt, mit

$$\begin{aligned}\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &= \beta_1 \\ 0 &= \beta_2 \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &= \beta_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= \beta_4 \\ \alpha_4 + \alpha_5 &= \beta_5 \\ 0 &= \beta_6,\end{aligned}$$

d.h. wenn gilt: $\beta_2 = \beta_6 = 0$, $\beta_1 = \beta_4 + \beta_5$.

Wegen $\text{rang } I = \text{rang } \bar{f} = \text{rang } f$ und $\text{rang } I' = \text{rang } I$ gilt:

$$\dim \mathcal{Z} = |U| - \text{rang } I \text{ und}$$

$$\dim \mathcal{C} = \text{rang } I.$$

Die Zahl $\nu = |U| - \text{rang } I$ heißt zyklomatische Zahl von H , die Zahl $\lambda = \text{rang } I$ heißt cozyklomatische Zahl von H .

(2.8) Satz Es gibt genau 2^ν verschiedene Zyklen und 2^λ verschiedene Cozyklen.

Beweis: Da $\mathcal{Z}$ ein $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum ist, ist jeder Zyklus ein-eindeutig durch eine Teilmenge einer gegebenen Basis von $\mathcal{Z}$ bestimmt. Da jede Basis genau 2^ν Teilmengen enthält, gibt es genau 2^ν verschiedene Zyklen.

Entsprechendes gilt für $\mathcal{C}$.

(2.9) Beispiel Sei $H = (X, U, p)$ wie in (2.1) und (2.7).

Es ist $|U| = 6$ und $\text{rang } I = 3$. Daraus ergibt sich $\nu = 3$, $\lambda = 3$.

Es gibt genau 8 verschiedene Zyklen und 8 verschiedene Cozyklen (s. (2.2)).

(2.10) Satz Sei $U' \in \mathcal{R}(U)$. U' ist dann und nur dann ein Gerüst von H , wenn $f|_{\mathcal{R}(U')}: \mathcal{R}(U') \rightarrow \text{Bild } f$ ein Isomorphismus ist.

Beweis: Nach dem Homomorphiesatz gibt es genau einen Isomorphismus $\hat{f}: \mathcal{R}(U)/\text{Kern } f \rightarrow \text{Bild } f$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(U) & \xrightarrow{f} & \text{Bild } f \\ \downarrow \gamma & \nearrow \hat{f} & \\ \mathcal{R}(U)/\text{Kern } f & & \end{array}$$

kommutativ macht.

Ist $U' \in \mathcal{R}(U)$ ein Gerüst von H , so ist

$\gamma|_{\mathcal{R}(U')}: \mathcal{R}(U') \rightarrow \mathcal{R}(U)/\text{Kern } f$ ein Isomorphismus nach (1.12). Dann ist auch

$f|_{\mathcal{R}(U')} = (\hat{f} \circ \gamma)|_{\mathcal{R}(U')} = \hat{f} \circ (\gamma|_{\mathcal{R}(U')})$ ein Isomorphismus.

Ist für $U' \in \mathcal{R}(U)$ die Abbildung $f|_{\mathcal{R}(U')}$ ein

Isomorphismus, so auch $\hat{f}^{-1} \circ (f|_{\mathcal{R}(U')}) =$

$(\hat{f}^{-1} \circ f)|_{\mathcal{R}(U')} = \gamma|_{\mathcal{R}(U')}$. Nach (1.12) ist U' ein Gerüst von H .

Ein Cozyklus heißt Büschel, wenn er von der Form $f'(\{x\})$ für ein $x \in X$ ist. Da f' ein Homomorphismus ist, erzeugt die Menge aller Büschel $\mathcal{L}$.

(2.11) Beispiel Sei $H = (X, U, p)$ wie in (2.1).

Aus (2.2) ergibt sich, daß folgende Teilmengen von U Büschel sind: $\emptyset, \{u_1, u_4\},$

$\{u_1, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\}.$

Der folgende Satz zeigt, wann eine Menge von Büscheln eine Basis von $\mathcal{L}$ ist. Er ist die Verallgemeinerung eines Satzes von König ([16], S.134). Das zum Beweis des Satzes benötigte Lemma ist "dual" zu (2.10). Auf den Beweis, der entsprechend

dem Beweis von (2.10) verläuft, wird hier verzichtet.

(2.12) Lemma Sei $X' \in \mathcal{R}(X)$. X' ist dann und nur dann ein Gerüst zu Kern f' , wenn $f'|_{\mathcal{R}(X')} : \mathcal{R}(X') \rightarrow \mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist.

(2.13) Satz Sei $X' \in \mathcal{R}(X)$. Die Menge von Büscheln $f'[\mathcal{B}_{X'}] = \{f'(\{x\}) \mid x \in X'\}$ ist dann und nur dann eine Basis von $\mathcal{C}$, wenn X' ein Gerüst zu Kern f' ist.

Beweis: " $\Rightarrow$ "

Ist $f'[\mathcal{B}_{X'}]$ eine Basis von $\mathcal{C} = \text{Bild } f'$, so ist $f'|_{\mathcal{B}_{X'}}$ injektiv und also auch $f'|_{\mathcal{R}(X')}$.

$f'|_{\mathcal{R}(X')}$ ist nach Voraussetzung surjektiv.

Dann ist X' nach (2.12) ein Gerüst zu Kern f' .

" $\Leftarrow$ "

Ist X' ein Gerüst zu Kern f' , so ist nach (2.12)

$f'|_{\mathcal{R}(X')} : \mathcal{R}(X') \rightarrow \mathcal{C}$ ein Isomorphismus.

Dann ist $f'[\mathcal{B}_{X'}]$ eine Basis von $\text{Bild } f' = \mathcal{C}$.

Aus (2.4) ergibt sich, daß für $X' \in \mathcal{R}(X)$ dann und nur dann $X' \in \text{Kern } f'$ ist, wenn $|p'(u) \cap X'|$ für alle $u \in U$ gerade ist.

Aus (2.13) und (1.6) folgt unmittelbar $\dim \mathcal{C} = |X| - \dim \text{Kern } f'$.

Dann läßt sich für ν und λ auch folgende Formel angeben, die eine Verallgemeinerung der bekannten Definition in ungerichteten Graphen ist: $\nu = |U| - |X| + \dim \text{Kern } f'$,

$$\lambda = |X| - \dim \text{Kern } f'.$$

In ungerichteten Graphen ist die Menge der Komponenten eine Basis von Kern f' ; daher kann $\dim \text{Kern } f'$ in ungerichteten Graphen durch die Anzahl der Komponenten des Graphen ersetzt werden. In Hypergraphen ist dies i.A. nicht möglich (vgl. Teil 3).

(2.14) Beispiel Sei $H = (X, U, p)$ wie in (2.1) und (2.11).

Es ist Kern $f' = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_4, x_5\}, \{x_1, x_4, x_5\}\}$.

Dann sind $X' = \{x_2, x_3, x_4\}$ und $X'' = \{x_2, x_3, x_5\}$

Gerüste zu Kern f' .

$f'[\mathcal{B}_{X'}] = \{\{u_1, u_4\}, \{u_1, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\}\} =$

$f'[\mathcal{B}_{X''}]$ ist eine Basis von $\mathcal{L}$ (vgl. (2.2)).

Weiter ist $|X| = 5$ und $\dim \text{Kern } f' = 2$, woraus

$v = 3$ und $\lambda = 3$ folgt (vgl. (2.9)).

In der graphentheoretischen Literatur ist der Begriff EULER-Graph bekannt (z.B. König, [16]), der sich folgendermaßen verallgemeinern läßt: ein Hypergraph $H = (X, U, p)$ heißt EULER-Hypergraph, wenn U ein Zyklus ist. Es gilt wie für ungerichtete Graphen:

(2.15) Satz H ist dann und nur dann ein EULER-Hypergraph, wenn für alle $C \in \mathcal{L}$ gilt: $|C|$ ist gerade.

Beweis: Für $U' \in \mathcal{R}(U)$ ist $|U'| = |U' \cap U| \equiv \langle U', U \rangle \pmod{2}$.

Ist H ein EULER-Hypergraph, so ist $U \in \mathcal{Z}$ und

für alle $C \in \mathcal{L}$ ist $\langle C, U \rangle = 0$, also $|C|$ gerade.

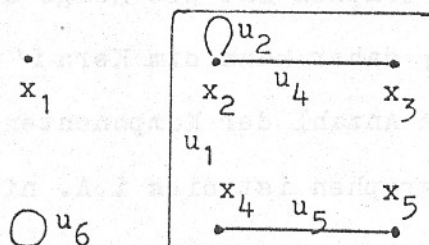
Ist $|C|$ gerade für alle $C \in \mathcal{L}$, so ist

$\langle C, U \rangle = 0$ für alle $C \in \mathcal{L}$ und es ist $U \in \mathcal{L}^\perp = \mathcal{Z}$.

(2.16) Beispiel Seien X , U und p wie in (2.1), $U' = U \setminus \{u_3\}$,

$\bar{p} = p|_{U'}$.

Dann ist $H' = (X, U', \bar{p})$ ein Hypergraph.



Es ist $Z' = \{\emptyset, \{u_2\}, \{u_6\}, \{u_1, u_4, u_5\}, \{u_2, u_6\}, \{u_1, u_2, u_4, u_5\}, \{u_1, u_4, u_5, u_6\}, U'\}$ und $\mathcal{C}' = \{\emptyset, \{u_1, u_4\}, \{u_1, u_5\}, \{u_4, u_5\}\}$.

H' ist ein EULER-Hypergraph.

Auch der in (2.3) definierte Hypergraph ist ein EULER-Hypergraph.

Eine zum EULER-Graphen "duale" Begriffsbildung ist die des paaren Graphen (z.B. König, [16], S.170, S.149). Ein Hypergraph

$H = (X, U, p)$ heißt paar, wenn U ein Cozyklus ist.

(2.17) Satz H ist dann und nur dann paar, wenn für alle $Z \in \mathcal{Z}$ gilt: $|Z|$ ist gerade.

Beweis: Für $U' \in \mathcal{R}(U)$ ist $|U'| = |U' \cap U| \equiv \langle U', U \rangle \pmod{2}$.

Ist H paar, so ist $U \in \mathcal{C}$ und für alle $Z \in \mathcal{Z}$

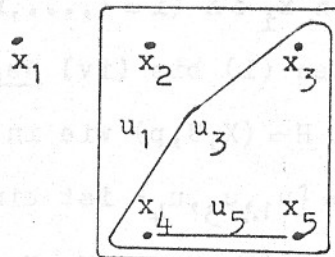
ist $\langle Z, U \rangle = 0$, also $|Z|$ gerade.

Ist $|Z|$ gerade für alle $Z \in \mathcal{Z}$, so ist

$\langle Z, U \rangle = 0$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$, und es ist $U \in \mathcal{Z}^\perp = \mathcal{C}$.

(2.18) Beispiel Seien X , U und p wie in (2.1), $U' = \{u_1, u_3, u_5\}$, $\bar{p} = p|_{U'}$.

Dann ist $H' = (X, U', \bar{p})$ ein Hypergraph.



Es ist $\mathcal{Z}' = \{\emptyset\}$ und $\mathcal{C}' = \mathcal{R}(U')$.

H' ist ein paarer Hypergraph; es ist

$U' = f'(\{x_5\})$.

3. Kreise und trennende Kantenmengen

In ungerichteten Graphen fallen die Begriffe Kreis und elementarer Zyklus sowie trennende Kantenmenge und elementarer Cozyklus zusammen (vgl. z.B. König, [16], S.123 und Harary, [14], S.38). In diesem Teil werden Kreise und trennende Kantenmengen in Hypergraphen und ihre Beziehungen zu Zyklen und Cozyklen untersucht.

Sei $U' \in \mathcal{R}(U)$, $U' \neq \emptyset$. U' heißt Weg, wenn es eine endliche

Folge $(x_1, u_1, \dots, x_n, u_n, x_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, von Elementen $x_i \in X$ ($i = 1, \dots, n+1$) und $u_i \in U'$ ($i = 1, \dots, n$) gibt, für die gilt:

- (i) die Elemente x_i ($i = 1, \dots, n+1$) sind, bis auf die mögliche Ausnahme von x_1 und x_{n+1} , paarweise verschieden,
- (ii) die Elemente u_i ($i = 1, \dots, n$) sind paarweise verschieden,
- (iii) $U' = \bigcup_{i=1}^n \{u_i\}$,
- (iv) u_i ist inzident mit x_i und x_{i+1} für $i = 1, \dots, n$.

Ist $U' \in \mathcal{R}(U)$ ein Weg, so heißt eine Folge $(x_1, u_1, \dots, x_n, u_n, x_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, von Elementen $x_i \in X$ ($i = 1, \dots, n+1$) und $u_i \in U'$ ($i = 1, \dots, n$) mit den Eigenschaften (i) bis (iv) Wegfolge von U' .

(3.1) Beispiel Sei $H = (X, U, p)$ wie in (2.1).

$U' = \{u_1, u_3, u_4\}$ ist ein Weg. Zwei Wegfolgen sind: $(x_4, u_1, x_2, u_4, x_3, u_3, x_5)$ und $(x_2, u_4, x_3, u_3, x_4, u_1, x_5)$.

Ein Weg $U' \in \mathcal{R}(U)$ heißt Kreis, wenn es eine Wegfolge

$(x_1, u_1, \dots, x_n, u_n, x_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, von U' gibt mit $x_1 = x_{n+1}$.

(3.2) Beispiel Sei $H = (X, U, p)$ wie in (2.1).

Es gibt genau folgende Kreise: $\{u_2\}, \{u_1, u_3\},$
 $\{u_1, u_4\}, \{u_1, u_5\}, \{u_1, u_3, u_4\}, \{u_1, u_3, u_5\},$
 $\{u_1, u_3, u_4, u_5\}, \{u_3, u_5\}$. Zum Beweis müssen je-
 weils Wegfolgen angegeben werden, die zeigen,
 daß die Kantenmenge ein Kreis ist. Für
 $\{u_1, u_3, u_4, u_5\}$ ist etwa $(x_2, u_4, x_3, u_3, x_4, u_5, x_5, u_1, x_2)$
 eine solche Wegfolge.

Die Definition des Kreises stimmt bis auf die Tatsache, daß
 für jede Schlinge $u \in U$ die Menge $\{u\}$ ein Kreis ist, mit dem
 von Berge ([4]) als Zyklus in einem Hypergraphen definierten
 Begriff überein.

Zwei Ecken $x, x' \in X$ heißen verbunden, wenn $x = x'$ ist oder es
 einen Weg $U' \in \mathcal{R}(U)$ mit einer Wegfolge $(x_1, u_1, \dots, x_n, u_n, x_{n+1})$,
 $n \in \mathbb{N}$, gibt, für die $x_1 = x$ und $x_{n+1} = x'$ ist.

(3.3) Lemma Die Verbundenheit ist eine Äquivalenzrelation
 auf X .

Beweis: Reflexivität und Symmetrie sind unmittelbar klar.

Seien $x, x', x'' \in X$ paarweise verschieden, x und x'
 sowie x' und x'' verbunden. Seien $U', U'' \in \mathcal{R}(U)$
 Wege mit Wegfolgen $(x_1, u_1, \dots, x_n, u_n, x_{n+1})$ bzw.
 $(x'_1, u'_1, \dots, x'_m, u'_m, x'_{m+1})$ und $x_1 = x$,
 $x_{n+1} = x'_1 = x'$, $x'_{m+1} = x''$. Sei $k \in \{1, \dots, n+1\}$
 das kleinste k , für das es ein $j \in \{1, \dots, m+1\}$
 gibt mit $x_k = x'_j$. Sei weiter $l \in \{1, \dots, m+1\}$ das
 größte l mit $x_k = x'_l$. Dann ist

$$U'' = \bigcup_{i=1}^{k-1} \{u_i\} \cup \bigcup_{j=1}^m \{u'_j\} \text{ ein Weg mit Wegfolge}$$

$$(x_1, u_1, \dots, u_{k-1}, x_k, u'_1, x'_{1+1}, \dots, x'_m, u'_m, x'_{m+1})$$

und es ist $x_1 = x$, $x'_{m+1} = x''$.

Also sind x und x'' verbunden, und die Verbundenheit ist eine transitive Relation.

Die Äquivalenzklassen der Verbundenheit heißen Komponenten von H .

(3.4) Beispiel Sei $H = (X, U, p)$ wie in (2.1).

Die Komponenten von H sind $\{x_1\}$ und

$$\{x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

Sei $U' \in \mathcal{R}(U)$. U' heißt trennende Kantenmenge, wenn der Hypergraph $H' = (X, U \setminus U', p|_{U \setminus U'})$ genau eine Komponente mehr als H hat und wenn U' mit dieser Eigenschaft minimal in $\mathcal{R}(U)$ ist (bzg. der Inklusion).

(3.5) Beispiel Sei $H = (X, U, p)$ wie in (2.1).

Es gibt genau folgende trennende Kantenmengen:

$$\{u_1, u_4\}, \{u_1, u_3\}.$$

Unmittelbar aus der Definition ergibt sich:

(3.6) Lemma Sei $U' \in \mathcal{R}(U)$. U' ist dann und nur dann eine

trennende Kantenmenge, wenn es eine Komponente

$X' \in \mathcal{R}(X)$ und ein $X'' \in \mathcal{R}(X)$, $X'' \subset X'$, gibt, so

daß gilt:

$$U' = \{u \in U \mid p(u) \cap X'' \neq \emptyset, p(u) \cap (X' \setminus X'') \neq \emptyset\} \text{ und}$$

$X' \setminus X''$ und X'' sind Komponenten des Hypergraphen

$$H' = (X, U \setminus U', p|_{U \setminus U'}).$$

Aus den Beispielen (2.2), (2.14), (3.2), (3.4) und (3.5) ergibt sich, daß

Kreise i.A. keine Zyklen und elementare Zyklen i.A. keine

Kreise sind,

trennende Kantenmengen i.A. keine Cozyklen und elementare Cozyklen i.A. keine trennenden Kantenmengen sind,

Komponenten i.A. nicht Elemente von Kern f' und elementare Elemente von Kern f' i.A. keine Komponenten sind.

Daraus ergibt sich, daß in Hypergraphen die zyklomatische und die cozyklomatische Zahl i.A. nicht von der Anzahl der Komponenten zusammen mit der Anzahl der Elemente von X und U festgelegt wird (vgl. S.31).

Sei $G = (X, U, p)$ ein Hypergraph. G heißt ungerichteter Graph, wenn $1 \leq |p(u)| \leq 2$ ist für alle $u \in U$.

(3.6) Satz Sei $G = (X, U, p)$ ein Hypergraph. G ist dann und nur dann ein ungerichteter Graph, wenn gilt:

- (i) $U' \in \mathcal{R}(U)$ ist dann und nur dann ein Kreis, wenn U' ein elementarer Zyklus ist,
- (ii) $U' \in \mathcal{R}(U)$ ist dann und nur dann eine trennende Kantenmenge, wenn U' ein elementarer Cozyklus ist.

Beweis: " $\Rightarrow$ "

Sei $G = (X, U, p)$ ein ungerichteter Graph.

(i) " $\Rightarrow$ "

Ist $U' \in \mathcal{R}(U)$ ein Kreis, so ist für alle $x \in X$ die Anzahl der mit x inzidenten Kanten von U' , die keine Schlingen sind, gleich 0 oder 2, und es ist $U' \neq \emptyset$. Nach (2.5) ist U' ein Zyklus. Daß U' außer $\emptyset$ keinen von U' verschiedenen Zyklus enthält, ist unmittelbar klar.

" $\leq$ "

Ist $U' \in \mathcal{Z}$ ein elementarer Zyklus, so ist $U' \neq \emptyset$. Sei $x \in X$ mit einer Kante $u \in U'$ inzident.

Ist u eine Schlinge, so ist $U' = \{u\}$, da U' andernfalls nicht elementar wäre, und U' ist ein Kreis.

Ist u keine Schlinge, so gibt es ein $x' \in X$, $x' \neq x$, das mit u inzident ist. Da U' ein Zyklus ist, gibt es ein $u' \in U'$, $u' \neq u$, das mit x' inzident ist. u' ist keine Schlinge, so daß es ein $x'' \in X$, $x'' \neq x'$, gibt, das mit u' inzident ist. Ist x'' gleich einer bereits durchlaufenen Ecke, so gibt es einen Kreis $U'' \in \mathcal{R}(U)$, $U'' \subset U'$, andernfalls wird das Verfahren fortgesetzt. Nach endlich vielen Schritten liefert das Verfahren einen Kreis $U'' \in \mathcal{R}(U)$, $U'' \subset U'$, $U'' \neq \emptyset$, der nach der bereits bewiesenen Implikation ein elementarer Zyklus ist. Also ist nach Voraussetzung $U'' = U'$.

(ii) In ungerichteten Graphen ist nach (2.4)

$$f'(X') = \{u \in U \mid p(u) \cap X' \neq \emptyset, p(u) \cap (X \setminus X') \neq \emptyset\}$$

für $X' \in \mathcal{R}(X)$, da aus $p'(u) \neq \emptyset$ folgt

$$|p(u)| = 2.$$

" $\leq$ "

Sei $U' \in \mathcal{Z}$ ein elementarer Cozyklus, $X' \in \mathcal{R}(X)$

mit $f'(X') = U'$ und sei X' mit dieser Eigenschaft minimal in $\mathcal{R}(X)$. Da $U' \neq \emptyset$ ist, ist auch $X' \neq \emptyset$.

Sei $X'' \in \mathcal{R}(X)$ eine Komponente von G mit $X' \cap X'' \neq \emptyset$. Dann ist $f'(X' \cap X'')$ ein Cozyklus mit $f'(X' \cap X'') \subset U'$ (da X'' eine Komponente von G ist) und $f'(X' \cap X'') \neq \emptyset$ (da sonst $f'(X' \setminus X'') = U'$ wäre, was nach der Definition von X' nicht möglich ist). Da U' elementar ist, gilt $f'(X' \cap X'') = U'$, und aus der Definition von X' folgt $X' \subset (X' \cap X'') \subset X''$.

Da $\{u \in U \setminus U' \mid p(u) \cap X' \neq \emptyset, p(u) \cap (X \setminus X') \neq \emptyset\} = \emptyset$ ist, also x und x' nicht verbunden sind, wenn $x \in X'$ und $x' \in X \setminus X'$ ist, ist X' Vereinigung von Komponenten von $G' = (X, U \setminus U', p|_{U \setminus U'})$.

Ist $X''' \in \mathcal{R}(X)$, $X''' \subset X'$, eine Komponente von G' , so ist $f'(X''') =$

$$\{u \in U \mid p(u) \cap X''' \neq \emptyset, p(u) \cap (X \setminus X''') \neq \emptyset\} \subset U'.$$

Aus $X''' \subset X' \subset X''$ folgt $f'(X''') \neq \emptyset$, da X'' sonst keine Komponente von G wäre. Da U' elementar ist, gilt $f'(X''') = U'$ und aus der Definition von X' folgt $X''' = X'$.

Ebenso zeigt man, daß $X'' \setminus X'$ eine Komponente von G' ist, da $f'(X'' \setminus X') = U'$ ist.

Nach (3.6) ist U' eine trennende Kantenmenge.

" $\Rightarrow$ "

Sei $U' \in \mathcal{R}(U)$ eine trennende Kantenmenge, so gibt es nach (3.6) eine Komponente

$X' \in \mathcal{R}(X)$ von G und ein $X'' \in \mathcal{R}(X)$, $X'' \subset X'$,
so daß gilt:

$$U' = \{u \in U \mid p(u) \cap X'' \neq \emptyset, p(u) \cap (X \setminus X'') \neq \emptyset\}.$$

Da X' eine Komponente von G ist, ist

$$\{u \in U \mid p(u) \cap X' \neq \emptyset, p(u) \cap (X \setminus X') \neq \emptyset\} = \emptyset \text{ und}$$

$$U' = \{u \in U \mid p(u) \cap X'' \neq \emptyset, p(u) \cap (X \setminus X'') \neq \emptyset\} =$$

$f'(X'')$. Also ist U' ein Cozyklus.

Ist U' nicht elementar, so gibt es ein

elementares $U'' \in \mathcal{L}$, $U'' \subset U'$, $U'' \neq U'$, $U'' \neq \emptyset$,

das nach dem bereits Bewiesenen eine tren-

nende Kantenmenge ist. Dann könnte U'

keine trennende Kantenmenge sein.

" $\Leftarrow$ "

Sei $u \in U$ mit $|p(u)| = 0$. Dann ist $\{u\} \in \mathcal{Z}$ nach (2.5)

und $\{u\}$ ist elementar. Andererseits ist $\{u\}$ kein

Kreis, was ein Widerspruch zur Voraussetzung

wäre.

Sei $u \in U$ mit $|p(u)| \geq 3$. Wegen (2.5) ist $\{u\} \notin \mathcal{Z}$,

da u keine Schlinge ist und es mindestens drei

Ecken gibt, die mit einer ungeraden Anzahl von

Kanten von $\{u\}$ inzident sind. Nach (1.23) gibt

es einen elementaren Cozyklus $U' \in \mathcal{L}$ mit $u \in U'$.

Nach Voraussetzung ist U' eine trennende Kanten-

menge. Nach (3.6) gibt es eine Komponente

$X' \in \mathcal{R}(X)$ von G und eine Menge $X'' \in \mathcal{R}(X)$, $X'' \subset X'$,

so daß $U' = \{u \in U \mid p(u) \cap X'' \neq \emptyset, p(u) \cap (X \setminus X'') \neq \emptyset\}$

ist. Weiter sind X'' und $X' \setminus X''$ Komponenten von

$G' = (X, U \cup U', p|_{U \cup U'})$. Dann ist $|p(u) \cap X''| \geq 2$ oder $|p(u) \cap (X' \setminus X'')| \geq 2$. O.B.d.A. seien $x, x' \in p(u) \cap X''$.

Da X'' eine Komponente von G' ist, gibt es einen Weg $U'' \in \mathcal{R}(U \cup U')$ mit einer Wegfolge

$(x_1, u_1, \dots, x_n, u_n, x_{n+1})$ und $x_1 = x, x_{n+1} = x'$.

Dann ist $U'' \cup \{u\}$ ein Kreis mit Wegfolge

$(x_1, u_1, \dots, x_n, u_n, x_{n+1}, u, x_1)$, also ein elementarer

Zyklus nach Voraussetzung. Es ist

$U' \cap (U'' \cup \{u\}) = \{u\}$, also $\langle U', U'' \cup \{u\} \rangle = 1$, was der

Orthogonalität von $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{C}$ widerspricht.

Daraus ergibt sich, daß $1 \leq |p(u)| \leq 2$ für alle

$u \in U$ ist.

Anhang

1. Endlichdimensionale Vektorräume mit innerem Produkt

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum.

Eine Abbildung $(,) : V \times V \rightarrow K$ heißt inneres Produkt auf V ,

wenn gilt: (i) $(v, v') = (v', v)$ für alle $v, v' \in V$,

(ii) $(v + v', v'') = (v, v'') + (v', v'')$ und

$(\alpha \cdot v, v') = \alpha \cdot (v, v')$ für alle $v, v' \in V$,

$\alpha \in K$,

(iii) ist $v \in V$ und $(v, v') = 0$ für alle $v' \in V$, so
ist $v = 0$.

Ist B eine Basis von V , so ist $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow K$, definiert

durch $\langle v, v' \rangle = \sum_{b \in B} \alpha_b \cdot \alpha'_b$ für alle $v, v' \in V$, $v = \sum_{b \in B} \alpha_b \cdot b$,

$v' = \sum_{b \in B} \alpha'_b \cdot b$, ein inneres Produkt auf V . $\langle , \rangle$ heißt

Standard-Produkt auf V bezüglich der Basis B .

Wir werden die meisten Sätze für Vektorräume mit innerem Produkt beweisen. In der Arbeit wird jedoch nur das Standard-Produkt im Vektorraum der Potenzmenge einer endlichen Menge benutzt.

(A1) Satz Ist U eine Teilmenge von V , so ist die Menge

$U^\perp := \{ v \in V \mid (v, u) = 0 \text{ für alle } u \in U \}$ ein Unterraum
von V .

Beweis: (i) $U^\perp + U^\perp \subset U^\perp$, da $(v + v', u) = (v, u) + (v', u) = 0$
für alle $v, v' \in U^\perp$, $u \in U$ ist,

- (ii) $\alpha \cdot U^\perp \subset U^\perp$ für alle $\alpha \in K$, da $(\alpha \cdot v, u) = \alpha \cdot (v, u) = 0$ ist für alle $\alpha \in K$, $v \in U^\perp$, $u \in U$.

Ist $U \subset V$, so heißt die Menge $U^\perp$ orthogonaler Unterraum zu U .
Ist $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow K$ eine Abbildung, die die Bedingungen (i) und (ii) eines inneren Produkts erfüllt, so ist (iii) äquivalent zu: $V^\perp = \{0\}$.

(A2) Lemma Für $U \subset V$ ist $U \subset (U^\perp)^\perp$.

Beweis: Für $u \in U$ ist $(u, v) = (v, u) = 0$ für alle $v \in U^\perp$, also ist $u \in (U^\perp)^\perp$.

(A3) Lemma Ist U ein Unterraum von V , so ist
 $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.

Beweis: (i) Sei $f : U \rightarrow \text{Hom}_K(V/U^\perp, K)$ definiert durch

$$(f(u))([v]) = (v, u) \text{ für alle } u \in U, v \in V.$$

Für $u \in U$ ist $f(u) \in \text{Abb}(V/U^\perp, K)$, da für alle $v, v' \in V$ mit $[v] = [v']$ gilt:

$$\begin{aligned} (f(u))([v]) - (f(u))([v']) &= (v, u) - (v', u) \\ &= (v - v', u) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $v - v' \in U^\perp$ ist.

Für $u \in U$ ist $f(u) \in \text{Hom}_K(V/U^\perp, K)$, da für alle $v, v' \in V$, $\alpha \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} (f(u))([v] + [v']) &= (f(u))([v + v']) \\ &= (v + v', u) \\ &= (v, u) + (v', u) \\ &= (f(u))([v]) + (f(u))([v']) \end{aligned}$$

und

$$(f(u))(\alpha \cdot [v]) = (f(u))([\alpha \cdot v])$$

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha \cdot v, u) \\
 &= \alpha \cdot (v, u) \\
 &= \alpha \cdot ((f(u))([v])).
 \end{aligned}$$

Weiter ist $f \in \text{Hom}_K(U, \text{Hom}_K(V/U^\perp, K))$, da für alle $u, u' \in U$, $\alpha \in K$ und $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}
 (f(u+u'))([v]) &= (v, u+u') \\
 &= (v, u) + (v, u') \\
 &= (f(u))([v]) + (f(u'))([v]) \\
 &= (f(u) + f(u'))([v])
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (f(\alpha \cdot u))([v]) &= (v, \alpha \cdot u) \\
 &= \alpha \cdot (v, u) \\
 &= \alpha \cdot ((f(u))([v])) \\
 &= (\alpha \cdot f(u))([v]).
 \end{aligned}$$

f ist injektiv, da für alle $u, u' \in U$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f(u) = f(u') &\Rightarrow (f(u))([v]) = (f(u'))([v]) \text{ für} \\
 &\text{alle } v \in V \\
 &\Rightarrow (v, u) = (v, u') \text{ für alle } v \in V \\
 &\Rightarrow (v, u - u') = 0 \text{ für alle } v \in V \\
 &\Rightarrow u - u' = 0 \\
 &\Rightarrow u = u'.
 \end{aligned}$$

Folglich ist $\dim U \leq \dim \text{Hom}_K(V/U^\perp, K)$. Wegen $\dim \text{Hom}_K(V/U^\perp, K) = \dim V/U^\perp = \dim V - \dim U^\perp$ gilt: $\dim V \geq \dim U + \dim U^\perp$.

(ii) Sei $g: V/U^\perp \rightarrow \text{Hom}_K(U, K)$ definiert durch

$$\begin{aligned}
 (g([v]))(u) &= (f(u))([v]) \text{ (f wie in (i)) für} \\
 &\text{alle } v \in V, u \in U.
 \end{aligned}$$

Für $v \in V$ ist $g([v]) \in \text{Hom}_K(U, K)$, da für alle $u, u' \in U$, $\alpha \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} (g([v]))(u + u') &= (f(u + u'))([v]) \\ &= (f(u))([v]) + (f(u'))([v]) \\ &= (g([v]))(u) + (g([v]))(u') \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (g([v]))(\alpha \cdot u) &= (f(\alpha \cdot u))([v]) \\ &= \alpha \cdot ((f(u))([v])) \\ &= \alpha \cdot ((g([v]))(u)). \end{aligned}$$

Es ist $g \in \text{Abb}(V/U^\perp, \text{Hom}_K(U, K))$, da für alle $v, v' \in V$ mit $[v] = [v']$ gilt:

$$\begin{aligned} (g([v]))(u) &= (f(u))([v]) \\ &= (f(u))([v']) \\ &= (g([v']))(u) \text{ für alle } u \in U. \end{aligned}$$

Weiter ist $g \in \text{Hom}_K(V/U^\perp, \text{Hom}_K(U, K))$, da für alle $v, v' \in V$, $\alpha \in K$ und $u \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} (g([v] + [v']))(u) &= (f(u))([v] + [v']) \\ &= (f(u))([v]) + (f(u))([v']) \\ &= (g([v]))(u) + (g([v']))(u) \\ &= (g([v] + [v']))(u) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (g(\alpha \cdot [v]))(u) &= (f(u))(\alpha \cdot [v]) \\ &= \alpha \cdot ((f(u))([v])) \\ &= \alpha \cdot ((g([v]))(u)) \\ &= (\alpha \cdot g([v]))(u). \end{aligned}$$

g ist injektiv, da für alle $v, v' \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} g([v]) = g([v']) &\Rightarrow (g([v]))(u) = (g([v']))(u) \\ &\text{für alle } u \in U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (f(u))([v]) = (f(u))([v']) \\ &\quad \text{für alle } u \in U \\ &\Rightarrow (v, u) = (v', u) \text{ für alle } u \in U \\ &\Rightarrow (v - v', u) = 0 \text{ für alle } u \in U \\ &\Rightarrow v - v' \in U^\perp \\ &\Rightarrow [v] = [v']. \end{aligned}$$

Folglich ist $\dim V/U^\perp \leq \dim \operatorname{Hom}_K(U, K)$. Wegen $\dim V/U^\perp = \dim V - \dim U^\perp$ und $\dim \operatorname{Hom}_K(U, K) = \dim U$ gilt: $\dim V \leq \dim U + \dim U^\perp$.

(A4) Satz Ist U ein Unterraum von V , so ist $U = (U^\perp)^\perp$.

Beweis: Nach (A3) ist $\dim (U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim U$.

Nach (A2) ist $U \subset (U^\perp)^\perp$. Zusammen folgt der Satz.

Wegen (A4) können wir U und $U^\perp$ als zueinander orthogonale Unterräume von V bezeichnen, wenn U ein Unterraum von V ist.

2. Adjungierte Abbildungen

Seien K ein Körper, V und W endlichdimensionale K -Vektorräume, $(\ , \)_V$ und $(\ , \)_W$ innere Produkte auf V bzw. W .

Zwei Abbildungen $f: V \rightarrow W$ und $g: W \rightarrow V$ heißen adjungiert, wenn für alle $v \in V$, $w \in W$ gilt: $(v, g(w))_V = (f(v), w)_W$.

(A5) Lemma Ist $f \in \operatorname{Abb}(V, W)$, so gibt es höchstens ein

$g \in \operatorname{Abb}(W, V)$, so daß f und g adjungiert sind.

Beweis: Seien $g_1, g_2 \in \operatorname{Abb}(W, V)$, so daß f und g_1 sowie f und g_2 adjungiert sind. Dann gilt für alle $w \in W$:

$$\begin{aligned} (v, g_1(w) - g_2(w))_V &= (v, g_1(w))_V - (v, g_2(w))_V \\ &= (f(v), w)_W - (f(v), w)_W \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $v \in V$.

Es ist für alle $w \in W$: $g_1(w) = g_2(w)$, also $g_1 = g_2$.
Ist $f \in \text{Abb}(V, W)$ und existiert ein $g \in \text{Abb}(W, V)$, so daß f und g adjungiert sind, bezeichnen wir g mit f' .

(A6) Lemma Sei $f \in \text{Abb}(V, W)$. Existiert $f' \in \text{Abb}(W, V)$, so sind f und f' Homomorphismen.

Beweis: Seien $v, v' \in V$, $\alpha \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} (f(v + v') - f(v) - f(v'), w)_W &= (f(v + v'), w)_W - (f(v), w)_W - (f(v'), w)_W \\ &= (v + v', f'(w))_V - (v, f'(w))_V - (v', f'(w))_V \\ &= (v, f'(w))_V + (v', f'(w))_V - (v, f'(w))_V - (v', f'(w))_V \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $w \in W$, also $f(v + v') = f(v) + f(v')$

und

$$\begin{aligned} (f(\alpha \cdot v) - \alpha \cdot f(v), w)_W &= (f(\alpha \cdot v), w)_W - (\alpha \cdot f(v), w)_W \\ &= (\alpha \cdot v, f'(w))_V - \alpha \cdot (v, f'(w))_V \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $w \in W$, also $f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v)$.

Analog zeigt man, daß f' ein Homomorphismus ist.

(A7) Satz Seien $f \in \text{Hom}_K(V, W)$, $f' \in \text{Hom}_K(W, V)$, f und f' adjungiert, so gilt:

(i) Kern $f = (\text{Bild } f')^\perp$.

(ii) Bild $f' = (\text{Kern } f)^\perp$.

(iii) rang $f = \text{rang } f'$.

- Beweis: (i) Ist $v \in \text{Kern } f$, so ist $(v, f'(w))_V = (f(v), w)_W = (0, w)_W = 0$ für alle $w \in W$, also ist $v \in (\text{Bild } f')^\perp$.
- Ist $v \in (\text{Bild } f')^\perp$, so ist $0 = (v, f'(w))_V = (f(v), w)_W$ für alle $w \in W$, also ist $f(v) = 0$ und $v \in \text{Kern } f$.
- (ii) $\text{Bild } f' = ((\text{Bild } f')^\perp)^\perp = (\text{Kern } f)^\perp$.
- (iii) $\text{rang } f = \dim V - \dim \text{Kern } f$
 $= \dim V - \dim (\text{Bild } f')^\perp$
 $= \dim V - \dim V + \dim \text{Bild } f'$
 $= \text{rang } f'.$

(A8) Satz Seien B und C Basen von V bzw. W , $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ die Standard-Produkte auf V bzw. W bezüglich der Basen B bzw. C , $f \in \text{Hom}_K(V, W)$. Dann existiert $f' \in \text{Hom}_K(W, V)$, und es ist

$$f'(w) = \sum_{c \in C} \beta_c \cdot \left(\sum_{b \in B} \langle f(b), c \rangle_W \cdot b \right) \text{ für alle } w \in W,$$

$$w = \sum_{c \in C} \beta_c \cdot c.$$

Beweis: Sei $f' : W \rightarrow V$ definiert wie oben.

(i) Für $c \in C$ gilt: $f'(c) = \sum_{b \in B} \langle f(b), c \rangle_W \cdot b$.

Ist $w \in W$, $w = \sum_{c \in C} \beta_c \cdot c$, so sieht man sofort,

daß $f'(w) = \sum_{c \in C} \beta_c \cdot f'(c)$ gilt. f' ist also

die lineare Fortsetzung der Abbildung

$f'|_C : C \rightarrow V$, und somit ist $f' \in \text{Hom}_K(W, V)$.

(ii) Sei $c \in C$, $b' \in B$. Dann ist

$$\langle b', f'(c) \rangle_V = \langle b', \sum_{b \in B} \langle f(b), c \rangle_W \cdot b \rangle_V$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{b \in B} \langle f(b), c \rangle_W \cdot \langle b', b \rangle_V \\
 &= \langle f(b'), c \rangle_W
 \end{aligned}$$

(iii) Sei $v \in V$, $w \in W$, $v = \sum_{b \in B} \alpha_b \cdot b$, $w = \sum_{c \in C} \beta_c \cdot c$.

Dann ist:

$$\begin{aligned}
 \langle f(v), w \rangle_W &= \langle f(\sum_{b \in B} \alpha_b \cdot b), \sum_{c \in C} \beta_c \cdot c \rangle_W \\
 &= \sum_{\substack{b \in B \\ c \in C}} \alpha_b \cdot \beta_c \cdot \langle f(b), c \rangle_W \\
 &= \sum_{\substack{b \in B \\ c \in C}} \alpha_b \cdot \beta_c \cdot \langle b, f'(c) \rangle_V \\
 &= \langle \sum_{b \in B} \alpha_b \cdot b, f'(\sum_{c \in C} \beta_c \cdot c) \rangle_V \\
 &= \langle v, f'(w) \rangle_V.
 \end{aligned}$$

3. Der $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum $\mathcal{R}(M)$

Sei M eine endliche Menge, $\mathcal{R}(M)$ die Potenzmenge von M . Für alle $A, B \in \mathcal{R}(M)$ sei $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, wobei " $\setminus$ " die mengentheoretische Differenz ist.

$+$ ist eine assoziative und kommutative innere Komposition auf $\mathcal{R}(M)$. Da weiter für alle $A \in \mathcal{R}(M)$ gilt: $\emptyset + A = A$ und $A + A = \emptyset$, ist $(\mathcal{R}(M), +)$ eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist $\emptyset$; jedes $A \in \mathcal{R}(M)$ ist zu sich selbst invers.

Für $0, 1 \in \mathbb{Z}_2$ sei $0 \cdot A = \emptyset$ und $1 \cdot A = A$ für alle $A \in \mathcal{R}(M)$.

$\cdot$ ist eine äußere Komposition auf $\mathcal{R}(M)$ mit Operatorenbereich $\mathbb{Z}_2$.

$(\mathcal{R}(M), +, \mathbb{Z}_2, \cdot)$ ist ein $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum, da gilt:

$$(i) \quad \alpha \cdot (A + B) = (\alpha \cdot A) + (\alpha \cdot B),$$

$$(ii) \quad (\alpha + \beta) \cdot A = (\alpha \cdot A) + (\beta \cdot A),$$

$$(iii) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A,$$

$$(iv) \quad 1 \cdot A = A$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$, $A, B \in \mathcal{R}(M)$.

Die Menge der einelementigen Teilmengen von M ist eine Basis von $\mathcal{R}(M)$, sie wird mit $\mathcal{B}_M$ bezeichnet.

Es ist $\dim \mathcal{R}(M) = |M|$.

Ist M' eine Teilmenge von M , so ist $\mathcal{R}(M')$ ein Unterraum von $\mathcal{R}(M)$.

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{R}(M) \times \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ das Standard-Produkt auf $\mathcal{R}(M)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_M$, so gilt für alle $A, B \in \mathcal{R}(M)$:

$$(i) \quad \langle A, B \rangle = 0 \text{ dann und nur dann, wenn } |A \cap B| \equiv 0 \pmod{2},$$

$$(ii) \quad \langle A, B \rangle = 1 \text{ dann und nur dann, wenn } |A \cap B| \equiv 1 \pmod{2}.$$

Literatur

- [1] E.Artin, Geometric algebra. New York 1957
- [2] C.Berge, Les problèmes de flot et de tension. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, Bruxelles, 3 (1961), 69 - 93
- [3] C.Berge, Transport- und Potentialprobleme. In: Berge, Ghouila-Houri, Programme, Spiele, Transportnetze. Leipzig 1969, S. 119 - 249
- [4] C.Berge, Graphes et hypergraphes. Paris 1970
- [5] N.Bourbaki, Algèbre, Chapitre 2: Algèbre linéaire. Paris 1962 (3^{ème} édition)
- [6] N.Bourbaki, Algèbre, Chapitre 9: Formes sesquilinéaires et formes quadratiques. Paris 1959
- [7] W.Dörfler, J.Mühlbacher, Graphentheorie für Informatiker. Berlin, New York 1973
- [8] H.D.Dombrowski, Graphentheorie. (Manuskript)
- [9] L.Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736), 128 - 140
deutsch in: Speiser (Hrsg.), Klassische Stücke der Mathematik. Zürich, Leipzig 1925, S. 127 - 138
- [10] G.de Ghellinck, Aspects de la notion de dualité en théorie des graphes. Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, Bruxelles, 3 (1961), 94 - 102

- [11] A.Ghouila-Houri, Flots et tensions dans un graphe.
(Thèse). Annales Scientifiques de
l'Ecole Normale Supérieure, 3^e série,
81 (1964), 267 - 339
- [12] R.Gould, Graphs and vector spaces. Journal of Mathematics
and Physics 37 (1958), 193 - 214
- [13] K.P.Grotemeyer, Lineare Algebra. (Vorlesungsausarbeitung).
Berlin 1967
- [14] F.Harary, Graph theory. Reading, Mass. 1969
- [15] G.Kirchhoff, Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf
welche man bei der Untersuchung der linearen
Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird.
Annalen der Physik und Chemie 72 (1847),
497 - 508
- [16] D.König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.
Leipzig 1936. Nachdruck: New York 1960
- [17] G.J.Minty, On the axiomatic foundations of the theories
of directed linear graphs, electrical networks
and network-programming. Journal of Mathemat-
ics and Mechanics 15 (1966), 485 - 520
- [18] L.Oubiña, Des cycles et cocycles en hypergraphes.
Discrete Mathematics 8 (1974), 71 - 80
- [19] S.Seshu, M.B.Reed, Linear graphs and electrical networks.
Reading, Mass., London 1961
- [20] O.Veblen, Analysis Situs. New York 1931 (2nd edition)
- [21] H.Whitney, On the abstract properties of linear depen-
dence. American Journal of Mathematics
57 (1935), 509 - 533

