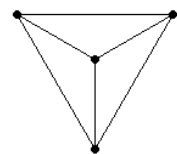
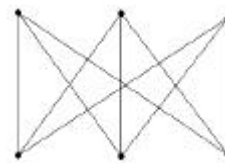
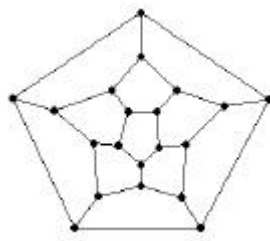
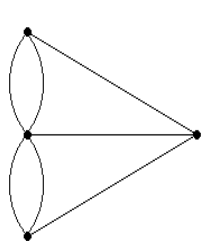


Bernd Döring

# Wege, Platten, Färben

## Vom Problem zur Theorie der Graphen



© Bernd Döring, 2002-2005

Bernd Döring  
Johannes-Althusius-Gymnasium  
Früchteburger Weg 28  
26721 Emden

# Inhaltsverzeichnis

- 0. Einleitung
- 1. Probleme
  - 1.1. Vier Probleme ...
  - 1.2. ... und ihre Geschichte
- 2. Graphen
- 3. Eulersche Graphen
- 4. Hamiltonsche Graphen
- 5. Planare Graphen
- 6. Der Vierfarbensatz
- 7. Literatur
  - 7.1. Literatur
  - 7.2. Internet-Seiten

## 0. Einleitung

Leonhard Euler, einer der genialsten Mathematiker aller Zeiten, veröffentlichte 1736 die erste Arbeit über Graphentheorie. Darin löste er die seitdem als Königsberger Brückenproblem bekannte Aufgabe, zu entscheiden, ob es möglich sei, einen Rundweg über alle Brücken der Stadt zu gehen.

Graphentheorie hat mit den bekannteren Funktionsgraphen der Analysis nichts zu tun. Mathematiker beschäftigen sich dort vielmehr mit zunächst recht einfach aussehenden Strukturen, die aus Punkten (in der Fachsprache Ecken genannt) und Verbindungslinien zwischen ihnen (Kanten genannt) bestehen. Besonders reizvoll an der Graphentheorie ist, dass fast alle Begriffe und Sätze in enger Beziehung zu Problemen stehen, von denen sich viele allgemein verständlich formulieren lassen. Trotzdem hat es bei einigen über einhundert Jahre gedauert, bis eine Lösung bewiesen wurde.

Hier wird ein kleiner aber grundlegender Teil der Graphentheorie dargestellt. Dabei liegt der in jedem Kapitel entwickelten Mathematik ein Problem zu Grunde, zu dessen Lösung Definitionen und Sätze entwickelt werden. Dadurch kann der Leser leichter als in anderen Gebieten der Mathematik miterleben, warum und wie Theorie (von Menschen) gemacht wird.

# 1. Vier Probleme

## 1.1. Probleme ...

### Problem 1

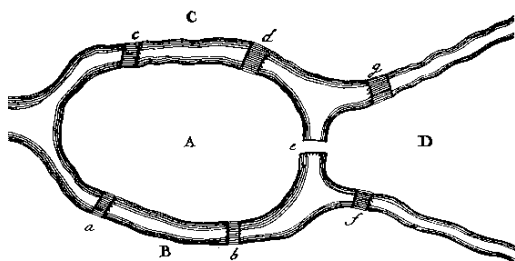


Abbildung 1.1

Gibt es einen Rundweg, der jede Brücke genau einmal überquert? Woran erkennt man, ob es solch einen Weg gibt?

### Problem 2

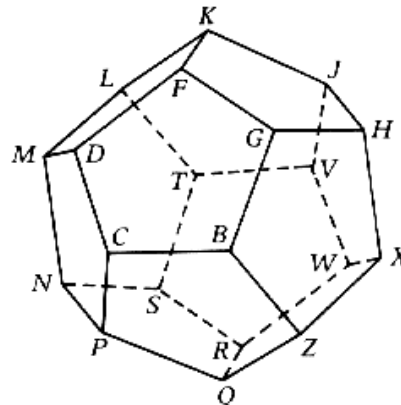


Abbildung 1.2

Gibt es einen Rundweg um den Dodekaeder, der jeden Eckpunkt genau einmal durchläuft? Woran erkennt man, ob es solch einen Weg gibt?

### Problem 3

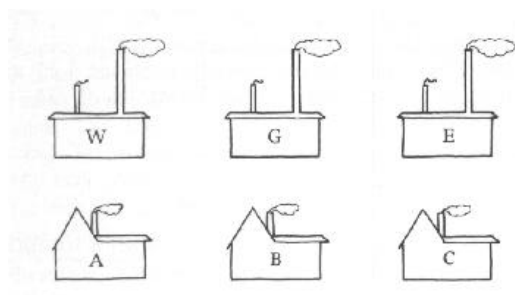


Abbildung 1.3

Kann man jedes Haus direkt mit jedem Werk verbinden und die Leitungen so legen, dass keine Kreuzungen entstehen? Woran erkennt man, ob kreuzungsfreie Verbindungen möglich sind?

### Problem 4



Abbildung 1.4

Wie viele Farben benötigt man mindestens, wenn aneinander grenzende Länder verschiedene Farben haben?

## 1.2. ... und ihre Geschichte

### Problem 1: Das Königsberger Brückenproblem

In seiner Arbeit „solutio problematis ad geometriam situs pertinentis“, die Leonhard Euler 1736 in lateinischer Sprache veröffentlichte, lieferte er eine Lösung für die allgemeine Problemstellung von Rundwegen.

### Problem 2: Around the World

1859 kam in London das Spiel „The Icosian Game“ auf den Markt, in dem auf einem Dodekaeder alle Eckpunkte genau einmal durchlaufen werden sollten. Autor des Spiels war der Mathematiker Sir William Rowan Hamilton. Ein finanzieller Erfolg war das Spiel nicht.



Abbildung 1.6

### Problem 3: Kreuzungsfreie Verbindungen

1917 veröffentlichte H. E. Dudeney in Amusements in Mathematics unter dem Titel „water, gas, and electricity“ das Rätsel, die drei Werke jeweils mit den drei Häusern ohne Kreuzungen zu verbinden. Angeblich ist das Rätsel noch viel älter.

### Problem 4: Das Vierfarbenproblem

In der Mitte des 19. Jahrhunderts vermutete Francis Guthrie, man könne jede Landkarte mit nur vier Farben so kolorieren, dass aneinandergrenzende Länder verschieden gefärbt sind. Sein Bruder Frederick teilte dem Mathematik-Professor Augustus De Morgan diese Vermutung mit, die erstmals 1852 in einem Brief erwähnt wurde. 1879 veröffentlichte Alfred Bray Kempe einen (allseits akzeptierten) Beweis und wurde daraufhin Fellow of the Royal Society. Doch der „Beweis“ enthielt einen Fehler, der erst 1890 von Percy John Heawood aufgedeckt wurde.

## 2. Graphen

Bei den Problemen 2 und 3 lag offensichtlich eine Struktur aus Punkten und Verbindungslinien zwischen diesen Punkten zu Grunde. Dies lässt sich auch bei den Problemen 1 und 4 wiederfinden.

Problem 1

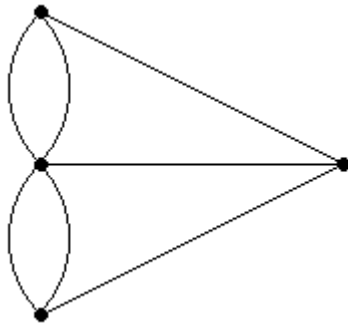
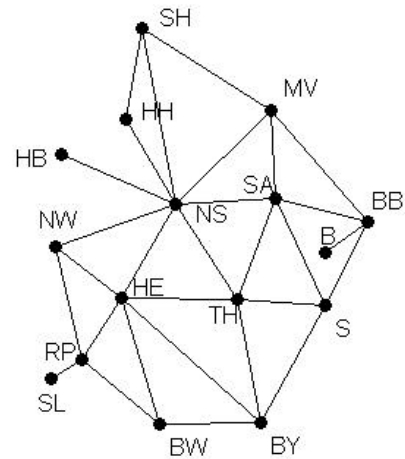


Abbildung 2.1

Problem 4



Auch Problem 2 lässt sich auch in der Ebene zeichnen. Für Problem 3 gibt es eine naheliegende Veranschaulichung, die leider nicht die geforderte Kreuzungsfreiheit besitzt.

Problem 2

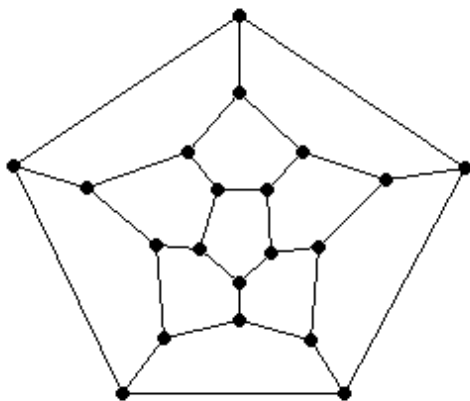


Abbildung 2.3

Problem 3

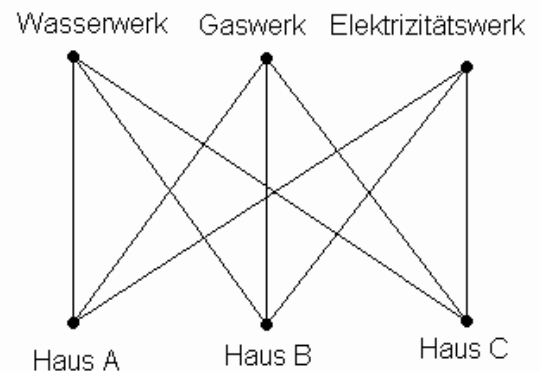


Abbildung 2.4

Diese Struktur wird als Graph definiert. Die Punkte werden Ecken genannt, die Verbindungslinien Kanten. Dabei kann eine Kante zwei Ecken verbinden, oder von einer Ecke zur selben Ecke führen. Dann wird die Kante Schlinge genannt. Verbinden zwei Kanten die selben Ecken, spricht man von Mehrfachkanten.

### Definition 2.1

Seien  $E$  und  $K$  endliche Mengen,  $E \neq \emptyset$ ,  $a: K \rightarrow \mathcal{P}(E)^{(1)}$  eine Abbildung, die jedem  $k \in K$  eine ein- oder zweielementige Teilmenge von  $E$  zuordnet.  $G = (E, K, a)$  heißt **Graph**, die Elemente von  $E$  **Ecken**, die Elemente von  $K$  **Kanten**. Eine Ecke  $e \in E$  und eine Kante  $k \in K$  heißen **benachbart**, wenn  $e \in a(k)$ . Zwei Ecken  $e_1, e_2 \in E$  heißen **benachbart**, wenn es ein  $k \in K$  mit  $a(k) = \{e_1, e_2\}$  gibt. Zwei Kanten  $k_1, k_2 \in K$  heißen **benachbart**, wenn es ein  $e \in E$  mit  $e \in a(k_1)$  und  $e \in a(k_2)$  gibt. Eine Ecke, die zu keiner anderen Ecke benachbart ist, heißt **isoliert**. Ist  $a(k)$  eine einelementige Teilmenge von  $E$ , heißt  $k$  **Schlinge**. Gibt es keine zwei verschiedenen  $k_1, k_2 \in K$  mit  $a(k_1) = a(k_2)$ , so ist der Graph **ohne Mehrfachkanten**.

### Beispiel 2.1

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ,  $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$ ,  $a: K \rightarrow \mathcal{P}(E)$  mit  $a(k_1) = \{e_1\}$ ,  $a(k_2) = \{e_1, e_2\}$ ,  $a(k_3) = \{e_2, e_3\}$ ,  $a(k_4) = \{e_1, e_3\}$ ,  $a(k_5) = \{e_1, e_3\}$ . Dann ist  $G = (E, K, a)$  ein Graph, der so veranschaulicht werden kann.

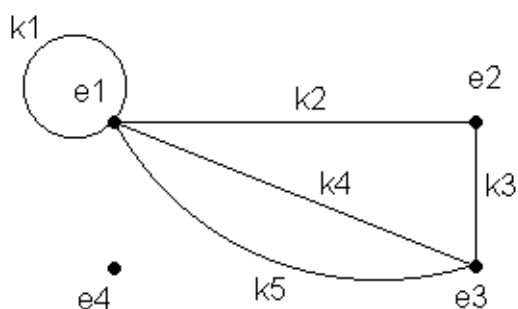


Abbildung 2.5

Dabei ist  $k_1$  eine Schlinge,  $e_4$  ist eine isolierte Ecke. Wegen  $k_4$  und  $k_5$  enthält der Graph Mehrfachkanten.

Bei den Problemen 1 und 2 war es wichtig, wie viele Kanten zu einer Ecke benachbart sind.

### Definition 2.2

Sei  $G = (E, K, a)$  ein Graph. Der **Grad einer Ecke**  $e \in E$  ist die Anzahl der Kanten  $k \in K$ , für die gilt:  $e \in a(k)$ , wobei Schlingen doppelt zählen.

Im Beispiel 2.1 ist der Grad von  $e_1$  5, von  $e_2$  2, von  $e_3$  3 und von  $e_4$  0.

<sup>(1)</sup>  $\mathcal{P}(E)$  ist die Menge aller Teilmengen von  $E$ .

### Satz 2.1

Die Summe aller Eckengrade ist eine gerade Zahl.

Beweis:

Jede Kante wird genau zweimal gezählt, was auch für Schlingen gilt. Also ist die Summe aller Eckengrade gleich  $2 \cdot |K|^{(2)}$  und damit eine gerade Zahl.

### Satz 2.2

In jedem Graphen ist die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade.

Beweis:

Siehe Aufgabe 4.

### Definition 2.3

Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $G = (E, K, a)$  ein Graph.

- (i)  $G$  heißt **vollständig**, wenn es keine Schlingen und keine Mehrfachkanten gibt und jede Ecke zu jeder anderen Ecke benachbart ist. Ein vollständiger Graph mit  $n$  Ecken wird mit  $K_n$  bezeichnet.
- (ii)  $G$  heißt **paar**, wenn sich die Eckenmenge  $E$  in zwei Teilmengen zerlegen lässt:  $E_1, E_2 \subset E$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ,  $E_1 \cup E_2 = E$ , so dass keine zwei Ecken aus einer dieser Teilmengen zueinander benachbart sind, aber jede Ecke einer Teilmenge zu jeder Ecke der anderen Teilmenge. Ein paarer Graph mit  $|E_1| = n$  und  $|E_2| = m$  wird mit  $K_{m,n}$  bezeichnet.

Die Bezeichnungen  $K_n$  und  $K_{m,n}$  erinnern an Kazimir Kuratowski. Zwei dieser Graphen spielen die Hauptrolle im Kapitel über planare Graphen.

Bei Beispiel 3 geht es darum, die Kanten geschickt in die Ebene zu zeichnen. Vielleicht erreicht man sein Ziel auch durch eine Veränderung der Lage der Ecken. Daher ist es sinnvoll, Graphen zu identifizieren, die sich nicht wesentlich unterscheiden, in denen also die „benachbart“-Beziehung gleich ist.

### Definition 2.4

Zwei Graphen  $G_1 = (E_1, K_1, a_1)$  und  $G_2 = (E_2, K_2, a_2)$  heißen **isomorph**, wenn es bijektive Abbildungen<sup>(3)</sup>  $i_E: E_1 \rightarrow E_2$  und  $i_K: K_1 \rightarrow K_2$  gibt, mit  $e \in a_1(k) \Rightarrow i_E(e) \in a_2(i_K(k))$  für alle  $e \in E_1$  und  $k \in K_1$ .

---

<sup>(2)</sup>  $|K|$  ist die Anzahl der Elemente der Menge  $K$

<sup>(3)</sup> Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt bijektiv, wenn es zu jedem  $n \in N$  genau ein  $m \in M$  mit  $f(m) = n$  gibt.

Bei isomorphen Graphen sind die Bilder benachbarter Ecken und Kanten benachbart. Ferner sind die Bilder je zwei benachbarte Ecken benachbart sowie die Bilder je zwei benachbarter Kanten benachbart.

### Aufgaben

1. Gib alle Graphen ohne Mehrfachkanten mit  $|E|=1$  und  $|E|=2$  an.
2. Beweise, dass es genau 4 nicht isomorphe Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten mit drei Ecken gibt und genau 11 Graphen mit 4 Ecken.
3. Gib die Graphen  $K_5$ ,  $K_6$  und  $K_7$  an. Gib die Graphen  $K_{1,3}$ ,  $K_{1,4}$ ,  $K_{2,3}$ ,  $K_{2,4}$ ,  $K_{3,3}$  an.
4. Beweise Satz 2.2.
5. Sind die Graphen isomorph?

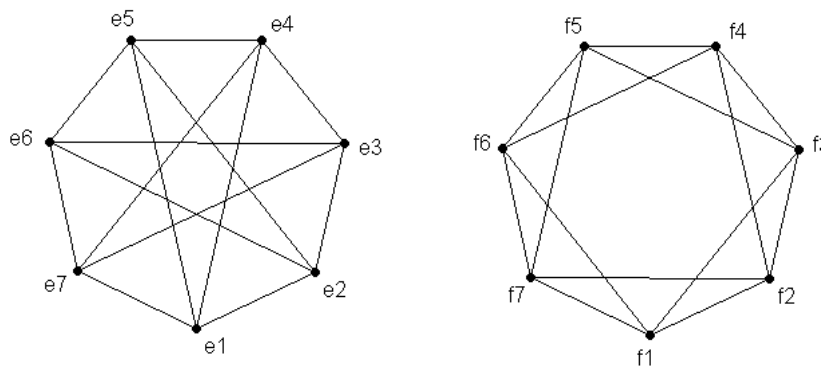


Abbildung 2.6

6. Beweise, dass der Graph in Abbildung 2.3 isomorph zum Dodekaeder in Abbildung 1.2 ist.
7. Sind die Graphen isomorph?

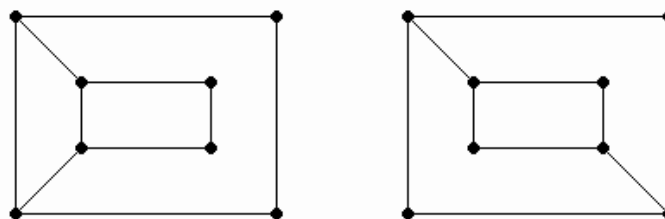


Abbildung 2.7

### 3. Eulersche Graphen

Das Königsberger Brückenproblem lässt sich zu der Frage verallgemeinern, woran ein Graph erkennbar ist, in dem es einen Rundweg aus benachbarten Kanten gibt, der jede Kante genau einmal enthält.

#### Definition 3.1

Seien  $G = (E, K, a)$  ein Graph,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e_1, e_n \in E$  zwei Ecken. Eine endliche Folge  $(e_1, k_1, e_2, k_2, \dots, k_{n-1}, e_n)$  aus nicht notwendig verschiedenen Ecken  $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$  und nicht notwendig verschiedenen Kanten  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \in K$  heißt **Weg** zwischen  $e_1$  und  $e_n$ , wenn gilt:  $a(k_i) = \{e_i, e_{i+1}\}$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Ist  $e_1 = e_n$ , heißt der Weg **Rundweg**.

#### Definition 3.2

Sei  $G = (E, K, a)$  ein Graph.  $G$  heißt **zusammenhängend**, wenn es für je zwei beliebige Ecken  $e, f \in E$ ,  $e \neq f$ , einen Weg zwischen  $e$  und  $f$  gibt.

#### Definition 3.3

Sei  $G = (E, K, a)$  ein Graph. Ein Weg heißt **Eulerscher Weg**, wenn in ihm jede Kante des Graphen genau einmal auftritt. Ein Rundweg heißt **Eulerscher Rundweg**, wenn in ihm jede Kante des Graphen genau einmal auftritt.

#### Satz 3.1 (Euler, 1736)

Sei  $G = (E, K, a)$  ein zusammenhängender Graph mit mindestens zwei Ecken.

- (i)  $G$  enthält genau dann einen Eulerschen Rundweg, wenn der Grad aller Ecken gerade ist.
- (ii)  $G$  enthält genau dann einen Eulerschen Weg, wenn keine oder genau zwei Ecken einen ungeraden Grad haben.

Beweis:

- (i) „ $\Rightarrow$ “

Jede Ecke in dem Rundweg ist zu der in der Folge vorangehenden und der nachfolgenden Kante benachbart. Da die erste und die letzte Ecke gleich sind, ist diese Ecke zur ersten und zur letzten Kante der Folge benachbart. Da in einem Eulerschen Rundweg jede Kante genau einmal auftritt, ist der Grad jeder Ecke die doppelte Anzahl des Auftretens der Ecke in der Folge, wobei

die erste und die letzte Ecke nur einmal gezählt werden. Also ist der Grad jeder Ecke eine gerade Zahl.

„ $\Leftarrow$ “

Da der Graph zusammenhängend ist und zwei Ecken enthält, haben alle Ecken mindestens den Grad 2. In einer beliebigen Ecke wird ein Weg begonnen und solange über noch nicht benutzte Kanten fortgesetzt, bis man eine bereits durchlaufene Ecke erreicht oder der Weg nicht weiter fortgeführt werden kann. In beiden Fällen enthält der Weg einen Rundweg. Hat man eine bereits durchlaufene Ecke erreicht, so ist dies unmittelbar klar. Ist der Weg nicht mehr fortsetzbar, so hat man die letzte Ecke auf einer Kante erreicht und es findet sich keine noch nicht benutzte Kante, um die Ecke zu verlassen. Da der Grad der Ecke mindestens 2 ist, ist die Ecke in dem Weg bereits durchlaufen worden und der Weg enthält einen Rundweg.

Wenn der Rundweg nicht alle Kanten des Graphen enthält, entfernt man die Kanten des Rundweges aus dem Graphen erhält man einen – möglicherweise nicht zusammenhängenden – Graphen, in dem erneut jede Ecke einen geraden Grad hat. Von einer Ecke mit Grad größer 0 beginnt man erneut einen beliebigen Weg über noch nicht benutzte Kanten, bis man eine bereits durchlaufene Ecke erreicht oder der Weg nicht weiter fortgeführt werden kann. Auch dieser Weg enthält einen Rundweg, der aus dem Graphen entfernt wird. Da der Grad aller Ecken gerade bleibt, kann man solange Rundwege konstruieren, die in keiner Kante übereinstimmen, bis alle Ecken den Grad 0 haben, also jede Kante in genau einem dieser Rundwege auftritt.

Da der Graph zusammenhängend ist, kann man die Rundwege nacheinander vereinen, so dass jeweils ein längerer Rundweg entsteht. Zum Schluss erhält man einen Rundweg, der jede Kante genau einmal enthält.

(ii) „ $\Rightarrow$ “

Ist der Eulersche Weg ein Rundweg, folgt die Behauptung aus (i). Ist der Eulersche Weg kein Rundweg, fügt man eine Kante zwischen der ersten und der letzten Ecke des Weges ein und erhält so einen Eulerschen Rundweg in einem um eine Kante erweiterten Graphen. Nach (i) ist in diesem Graphen der Grad jeder Ecke gerade. Wird die neue Kante wieder entfernt, haben genau die beiden mit ihr benachbarten Ecken einen ungeraden Grad.

„ $\Leftarrow$ “

Ist der Grad jeder Ecke gerade folgt die Behauptung aus (i). Haben genau

zwei Ecken einen ungeraden Grad, so fügt man zwischen ihnen eine zusätzliche Kante ein. Der neue Graph enthält nach (i) einen Eulerschen Rundweg, der auch so angeordnet werden kann, dass die neue Kante die letzte Kante im Rundweg ist. Entfernt man die neue Kante und die letzte Ecke aus dem Rundweg, so erhält man einen Eulerschen Weg im ursprünglichen Graphen.

#### Definition 3.4

Ein Graph, der einen Eulerschen Rundweg enthält, heißt **Eulerscher Graph**.

Damit ist das Problem der Rundwege, die jede Kante eines Graphen genau einmal enthalten, gelöst. Mit einem einfach zu überprüfenden Kriterium lässt sich entscheiden, ob es einen solchen Rundweg gibt. Der Beweis des Satzes liefert sogar einen Algorithmus, zur Konstruktion eines Rundweges.

#### Aufgaben

##### 1. Erschwerte Überfahrt

Ein Fährmann soll einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluss bringen. Das zur Verfügung stehende Boot fasst außer dem Fährmann nur einen weiteren „Passagier“. Aus leicht ersichtlichen Gründen darf in Abwesenheit des Fährmanns weder der Wolf mit der Ziege noch die Ziege mit dem Kohlkopf zusammen sein.

Löse das Problem durch Angabe eines Weges in einem Graphen.

##### 2. Krieger und Gefangene

Drei Krieger wollen mit drei Gefangenen einen Fluss in einem Boot überqueren, in dem nur zwei Personen Platz finden. Die Gefangenen rebellieren, sobald sie in der Überzahl sind, fliehen aber nicht, auch wenn sie alleine gelassen werden.

##### 3. Missionare und Kannibalen

Drei Missionare wollten mit drei Kannibalen einen Fluss überqueren. Das Boot konnte nur zwei Personen aufnehmen. Nur die Missionare und einer der Kannibalen waren in der Lage zu rudern. Da ihre Bemühungen um das

Seelenheil der Eingeboren nicht sehr erfolgreich war, durften die Missionare nie in Unterzahl sein.

4. Kann man das „Haus des Nikolaus“ in einem Zug zeichnen? Falls dies möglich ist, auf wie viele Arten?
5. Für welche natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  sind die vollständigen Graphen  $K_n$  und die paaren Graphen  $K_{m,n}$  Eulersche Graphen?
6. Kann ein Springer auf einem  $8 \times 8$ -Schachbrett so umherziehen, dass jeder mögliche Zug genau einmal ausgeführt wird? Ist dies auf einem  $7 \times 7$ -Schachbrett möglich?
7. Enthält der Dodekaeder-Graph einen Eulerschen Rundweg?

## 4. Hamiltonsche Graphen

Das im Spiel „The Icosian Game“ gestellte Problem lässt sich zu der Frage verallgemeinern, woran ein Graph erkennbar ist, in dem es einen Rundweg gibt, der jede Ecke genau einmal enthält.

### Definition 4.1

Sei  $G = (E, K, a)$  ein Graph.

Ein Weg heißt **Hamiltonscher Weg**, wenn in ihm jede Ecke des Graphen genau einmal auftritt.

Ein Rundweg heißt **Hamiltonscher Rundweg**, wenn in ihm jede Ecke des Graphen genau einmal auftritt, mit Ausnahme der Anfangsecke, die der Endecke entspricht.

Dieses Problem ist weitaus schwieriger als das der Eulerschen Rundwege. So gibt es keinen Satz, der Graphen mit Hamiltonschen Rundwegen charakterisiert, also eine Äquivalenz-Beschreibung liefert. Hier wird ein Satz bewiesen, der lediglich eine hinreichende Bedingung (aus der folgt, dass ein Hamiltonscher Rundweg existiert) enthält. Leicht überlegt man sich, dass es Graphen mit Hamiltonschen Rundwegen gibt, die diese Bedingung nicht erfüllen. Weiter enthält der Beweis keinen Algorithmus zur Konstruktion eines Hamiltonschen Rundwegs.

Jeder Graph lässt sich durch Hinzufügen von Ecken, die mit jeder ursprünglich vorhandenen Ecke durch eine ebenfalls hinzugefügte Kante verbunden sind, so ergänzen, dass er einen Hamiltonschen Rundweg enthält. Maximal benötigt man zusätzlich so viele Ecken wie der Graph ursprünglich enthält

### Satz 4.1

Sei  $G = (E, K, a)$  ein Graph. Dann enthält der Graph  $G' = (E \cup E', K \cup K', a')$  mit  $|E| = |E'|$ ,  $K'$  enthält zu jeder Ecke aus  $E'$  genau eine Kante zu jeder Ecke aus  $E$ , einen Hamiltonschen Rundweg.

Beweis:

Durchläuft man beliebig jeweils abwechselnd noch nicht benutzte Ecken aus  $E$  und aus  $E'$  und benutzt nur Kanten aus  $K'$  und wird als letzte Ecke die Anfangsecke in den Weg eingebaut, so hat man einen Hamiltonschen Rundweg erhalten.

#### Satz 4.2 (Dirac, 1952)

Sei  $G = (E, K, a)$  ein Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten mit  $|E| \geq 3$ .

Wenn der Grad jeder Ecke größer oder gleich  $\frac{1}{2} \cdot |E|$  ist, dann existiert ein Hamiltonscher Rundweg.

Beweis: (indirekt<sup>1</sup>)

In den Graphen wird eine minimale Anzahl von Ecken eingefügt, die mit jeder Ecke aus  $E$  durch eine Kante verbunden sind, so dass der neue Graph  $G'$  einen Hamiltonschen Rundweg enthält.

Wenn  $G$  keinen Hamiltonschen Rundweg enthält, ist die Anzahl  $n$  der minimal eingefügten Ecken größer als 0. In dem Hamiltonschen Rundweg tritt also mindestens eine hinzugefügte Ecke  $p$  (mit zwei hinzugefügten Kanten  $k_1$  und  $k_2$ ) zwischen zwei Ecken  $e, f \in E$  auf, wobei der Rundweg bei  $e$  beginnt:  $(e, k_1, p, k_2, f, \dots, e)$ . Zwischen  $e$  und  $f$  kann es keine Kante geben, da sonst  $p$  nicht erforderlich wäre und man auch mit  $n-1$  neuen Ecken auskäme. Auch kann in dem Hamiltonschen Rundweg keine zu  $f$  benachbarte Ecke  $f'$  direkt nach einer zu  $e$  benachbarten Ecke  $e'$  in der Folge stehen: man könnte sonst ebenfalls auf  $p$  verzichten, indem man den Abschnitt von  $f$  zu  $e'$  umgekehrt durchläuft und erhielte statt  $(e, k_1, p, k_2, f, \dots, e', k, f', \dots, e)$  den Rundweg  $(e, k_e, e', \dots, f, k_f, f', \dots, e)$ , wobei  $k_e$  eine Kante zwischen  $e$  und  $e'$ ,  $k_f$  eine Kante zwischen  $f$  und  $f'$  ist. Also folgt in dem Hamiltonschen Rundweg auf jede zu  $e$  benachbarte Ecke eine nicht zu  $f$  benachbarte Ecke. Da es mindestens  $\frac{1}{2} \cdot |E| + n$  zu  $e$  benachbarte Ecken gibt, gibt es auch mindestens  $\frac{1}{2} \cdot |E| + n$  nicht zu  $f$  benachbarte Ecken. Da die Anzahl der zu  $f$  benachbarten Ecken mindestens  $\frac{1}{2} \cdot |E| + n$  ist, gibt es insgesamt mindestens  $2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot |E| + n) = |E| + 2n$  Ecken. Da zu  $E$  jedoch nur  $n$  Ecken hinzugefügt wurden, haben wir aus der Annahme,  $G$  enthalte keinen Hamiltonschen Kreis, einen Widerspruch gefolgert. Also ist die Behauptung,  $G$  enthalte einen Hamiltonschen Kreis, wahr.

#### Definition 4.2

Ein Graph, der einen Hamiltonschen Rundweg enthält heißt **Hamiltonscher Graph**.

---

<sup>1</sup> In einem indirekten Beweis wird aus der Annahme der Nichtgültigkeit der Behauptung ein Widerspruch abgeleitet. Da die Mathematik solche Widersprüche nicht enthalten darf, ist die Nichtgültigkeit der Behauptung falsch, also die Behauptung wahr.

## Aufgaben

1. Für welche natürlichen Zahlen  $n$  und  $m$  gibt es in den Graphen
  - a)  $K_{m,n}$
  - b)  $K_n$einen Hamiltonschen Rundweg?
2. Kann ein Springer auf einem  $8 \times 8$  ( $7 \times 7$ ) Schachbrett so umherziehen, dass er jedes Feld genau einmal besucht und zum Ausgangsfeld zurückkehrt?
3. Gib einen Graphen an, der
  - a) einen Eulerschen Rundweg aber keinen Hamiltonschen Rundweg
  - b) keinen Eulerschen Rundweg aber einen Hamiltonschen Rundweg
  - c) einen Eulerschen und einen Hamiltonschen Rundweg besitzt.

## 5. Planare Graphen

### Definition 5.1

Ein Graph  $G = (E, K, a)$  heißt **eben**, wenn alle Ecken Punkte der Ebene sind, jede Kante  $k \in K$  eine Kurve zwischen den Ecken aus  $a(k)$  ist und sich zwei Kanten höchstens in den zu ihnen benachbarten Ecken schneiden.

Ein Graph heißt **planar**, wenn er zu einem ebenen Graphen isomorph ist.

### Definition 5.2

Sei  $G$  ein ebener Graph. Eine Menge, die alle Punkte der Ebene enthält, die durch Kurven, die weder eine Kante von  $G$  schneiden noch eine Ecke von  $G$  enthalten, verbunden werden können, heißt ein **Gebiet** von  $G$ .

### Satz 5.1 (Eulersche Polyederformel, 1752)

Sei  $G$  ein zusammenhängender ebener Graph mit  $n$  Ecken,  $m$  Kanten und  $f$  Gebieten,  $n, m, f \in \mathbb{N}$ .

Dann gilt:  $n + f = m + 2$ .

Beweis:

Der Beweis wird durch vollständige Induktion<sup>2</sup> nach der Anzahl der Kanten des Graphen geführt.

Ist  $m = 0$ , so besitzt der Graph keine Kante. Da er zusammenhängend ist und  $E \neq \emptyset$ , gibt es genau eine Ecke und damit genau ein Gebiet. Also ist  $n = 1$  und  $f = 1$  und die Behauptung gilt:  $1 + 1 = 0 + 2$ .

Die Behauptung gelte für alle Graphen mit  $m$  Kanten.

Aus einem zusammenhängenden ebenen Graphen  $G$  mit  $m+1$  Kanten wird eine beliebige Kante und gegebenenfalls eine dann isolierte Ecke so entfernt, dass der entstehende Graph  $G'$  zusammenhängend ist. Er ist ebenfalls eben. Da er  $m$  Kanten hat, gilt die Gleichung:  $n + f = m + 2$ . Wird in den Graphen  $G'$  die entfernte Kante und gegebenenfalls die entfernte Ecke eingefügt, so erhält man erneut den Graphen  $G$ .

Die eingefügte Kante kann

a) eine Schlinge an einer vorhandenen Ecke sein,

---

<sup>2</sup> Man kann eine Aussage für alle natürlichen Zahlen beweisen, indem man zeigt, dass sie für die erste natürliche Zahl (0 oder 1 – je nach Definition) gilt, und beweist, dass **wenn** die Aussage für eine natürliche Zahl  $n$  gilt, sie auch für die nachfolgende Zahl  $n+1$  gilt. Da die natürlichen Zahlen so definiert sind, dass es eine erste Zahl (0 oder 1) gibt und jede Zahl  $n$  genau eine Nachfolgezahl ( $n+1$ ) besitzt, ist auf diese Art gezeigt, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt.

b) zwei vorhandene Ecken verbinden oder

c) eine vorhandene Ecke mit einer entfernten und nun ebenfalls eingefügten Ecke verbinden.

Da der Graph  $G$  zusammenhängend ist, kann die neue Kante nicht zwei neu eingefügte Ecken verbinden und auch keine Schlinge an einer neu eingefügten Ecke sein.

In den Fällen a) und b) erhöht sich die Anzahl der Gebiete um 1 und die Anzahl der Ecken bleibt unverändert, im Fall c) erhöht sich die Anzahl der Ecken um 1 und die Anzahl der Gebiete verändert sich nicht. Da sich in allen drei Fällen die Anzahl der Kanten um 1 erhöht, gilt die Gleichung auch für  $m+1$  Kanten.

In den Fällen a) und b):  $n + f = m + 2 \Rightarrow n + f + 1 = m + 1 + 2$ ,

im Fall c):  $n + f = m + 2 \Rightarrow n + 1 + f = m + 1 + 2$ .

### Satz 5.2

Sei  $G$  ein planarer zusammenhängender Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten mit  $n$  Ecken und  $m$  Kanten,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ .

Dann gilt:  $m \leq 3n - 6$ .

Beweis:

$G$  ist isomorph zu einem ebenen Graphen  $G'$ .  $G'$  hat ebenfalls  $n$  Ecken und  $m$  Kanten. Die Anzahl der Gebiete in  $G'$  sei  $f$ ,  $f \in \mathbb{N}$ . In  $G'$  wird jedes Gebiet durch mindestens 3 Kanten begrenzt, da es keine Schlingen und keine Mehrfachkanten gibt. Jede Kante liegt zwischen genau 2 Gebieten. Also ist  $3f \leq 2m$  und somit  $f \leq \frac{2}{3}m$ .

Nach Satz 5.1 ist:

$$n + f = m + 2 \Rightarrow m = n + f - 2 \Rightarrow m \leq n + \frac{2}{3}m - 2 \Rightarrow \frac{1}{3}m \leq n - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6.$$

### Satz 5.3

Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind nicht planar.

Beweis:

Der  $K_5$  hat 5 Ecken und 10 Kanten. Wäre er planar, so wäre nach Satz 5.2:

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9. \text{ Widerspruch.}$$

Der  $K_{3,3}$  hat 6 Ecken und 9 Kanten. Also wäre nach Satz 5.1:

$$f = m - n + 2 = 9 - 6 + 2 = 5.$$

Wäre er planar, so wäre in einem isomorphen ebenen Graphen jedes Gebiet von mindestens 4 Kanten begrenzt, also wäre  $4f \leq 2m$ .

$$\text{Dann wäre } 20 = 4 \cdot 5 \leq 2 \cdot 9 = 18. \text{ Widerspruch.}$$